

# UNTERSUCHUNGEN ÜBER GRAVITATION UND ERDMAGNETISMUS.

(Vorläufige Mittheilung.)

Gelesen in den Sitzung der Akademie vom 20. April 1896

von Dr. ROLAND Baron EÖTVÖS,

O. M. UND Z. Z. PRÄSIDENT DER AKADEMIE, PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU BUDAPEST.

Aus: »Mathematikai és Természettudományi Értesítő» (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Akademie), Band XIV, pp. 221—266. 1896.

Die vorliegende Abhandlung ist ein kurzer zusammenfassender Bericht über die Resultate meiner nun seit acht Jahren über Gravitation und Erdmagnetismus angestellten Untersuchungen. Die ausnehmend empfindlichen Methoden, die ich besonders zur Messung der räumlichen Variationen dieser Kräfte ersonnen habe, machten es möglich, mich solchen Aufgaben zuzuwenden, die bislang für unangreifbar gehalten wurden. Da sich mir im Laufe der Untersuchungen stets neue, der Lösung harrende Fragen aufdrängten, war es mir kaum möglich, die einstweiligen Resultate zu veröffentlichen. Die kurzen Berichte, die ich von Zeit zu Zeit der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorlegen konnte, genügen kaum, die Resultate meiner Forschungen weiteren Kreisen zugänglich zu machen, und so möge denn die vorliegende, noch immer kurzgefasste und vorläufige Mittheilung mit Übergehung der in Einzelheiten gehenden theoretischen Ableitungen und Beobachtungsergebnissen klarlegen, was in meinen Untersuchungen als neu zu betrachten sei.

Es wäre ein Versäumnis, bei der Erwähnung meiner Arbeiten meiner Hülfсарbeiter zu vergessen. Durch Jahre hindurch

fand ich an Dr. RUDOLF v. KÖVESLIGETHY, gegenwärtig ö. ao. Professor an der Universität in Budapest einen eifrigen Gehilfen, und während der ganzen Zeit meiner Forschungen nahm an meinen Arbeiten zuerst als Hörer, später als Assistent des physikalischen Instituts Dr. KARL TANGL regen Teil. Es mögen beide Herren auch auf diesem Wege meinen Dank entgegen nehmen.

Alle bei den Forschungen nötigen neuen Istrumente loben die hohe Sorgfalt, Präcision und Eleganz des Herrn FERDINAND SÜSS, Directors der staatlich unterstützten mechanischen Lehrwerkstätte in Budapest.

## I. Messung der räumlichen Variationen der Schwere.

### 1. Feststellung der Aufgabe.

Unsere Kenntnisse über die räumlichen Variationen der Schwere sind wegen Unzulänglichkeit der sie messenden gebräuchlichen Instrumente bislang sehr lückenhaft geblieben. Das Pendel lässt dieselben in einer ihrer Kleinheit durchaus nicht angepassten Empfindlichkeit nur in grösseren Entfernungen erkennen, und die Waage, obwohl empfindlicher, bevorzugt nach Jolly's Verfahren nur eine einzige Richtung, indem sie blos die Vertikaländerung der Schwere giebt. Die Methoden und Instrumente, von denen in der Folge die Rede sein wird, erlauben das Abmessen der Variationen in kleinen Entfernungen von kaum einigen Decimetern und in verschiedenen Richtungen, sie ergänzen die mit dem Pendel und der Jolly'schen Waage angestellten Beobachtungen derart, dass nunmehr mit diesen zusammen die Schwerkraft der Grösse und Richtung nach nicht nur in einzelnen Punkten, sondern sogar in demjenigen Teile des Raumes als bekannt gelten kann, in welchem die Variation der Kraft als gleichmässig betrachtet werden darf. Mit Rücksicht auf dieses Ziel kann nun unsere Aufgabe näher umschrieben werden.

Bedeuten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  die Beschleunigungskomponenten im Punkte  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ , deren Werte im Anfangspunkte der Koordinaten, so bestehen für die rechtwinkligen Komponenten der Schwerebeschleunigung im gleichmässig veränderlichen Felde die folgenden Gleichungen:



$$\begin{aligned} X &= X_0 + \frac{\partial X}{\partial x} x + \frac{\partial X}{\partial y} y + \frac{\partial X}{\partial z} z, \\ Y &= Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial x} x + \frac{\partial Y}{\partial y} y + \frac{\partial Y}{\partial z} z, \\ Z &= Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial x} x + \frac{\partial Z}{\partial y} y + \frac{\partial Z}{\partial z} z; \end{aligned} \quad 1)$$

in welchen die nach den Koordinaten gebildeten Differentialquotienten von  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  neun Konstanten sind.

Stellt man die Schwerkraft als Resultante der Anziehung der die Erde bildenden Massen und der Centrifugalkraft dar, und bezeichnet mit  $V$  die Potentialfunktion der Anziehung der Erdmasse, mit  $\omega$  die constante Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, mit  $\rho$  den Drehungsradius des Punktes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , mit  $U$  endlich die Kräftefunktion der Schwere, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial}{\partial x} (V + \tfrac{1}{2} \rho^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial}{\partial y} (V + \tfrac{1}{2} \rho^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial}{\partial z} (V + \tfrac{1}{2} \rho^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{aligned} \quad 2)$$

und hiernach ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad 3)$$

und weiter auch:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\omega^2. \quad 4)$$

Wählt man nun das Koordinatensystem derart, dass die  $Z$ -Axe der Richtung der Schwere im Anfangspunkte der Koordinaten parallel sei, so wird

$$X_0=0 \quad Y_0=0 \quad \text{és} \quad Z_0=g_0.$$

Die Gleichungen 1) drücken die Schwerebeschleunigung im ganzen gleichmässig veränderlichen Raume mit Hülfe von zwölf Konstanten aus; da jedoch die  $Z$ -Axe durch die Lotrechte bestimmt ist, mithin  $X_0$  und  $Y_0$  Null werden,  $Z_0$  aber unmittelbar durch das Pendel erhältlich ist, so bleiben noch 9 Konstanten, zwischen denen die Gleichungen 3) und 4) zusammen vier Relationen bestimmen, so dass im Endresultate zur völligen Lösung der Aufgabe noch fünf Konstanten durch Messung zu bestimmen sein werden. Bevor ich auf die hiezu dienlichen Methoden einginge, wird es gut sein jene einfachen Beziehungen anzuführen, welche zwischen den hier auftretenden Grössen und der Niveaufläche  $U = \text{Const.}$  der Schwere bestehen.

Bezeichnet nämlich im Anfangspunct der Koordinaten  $\rho_x$  den Krümmungsradius eines Normalschnittes dieser Fläche in der Richtung der  $X$  Axe,  $\rho_y$  dasselbe in der Richtung der  $Y$  Axe, so ist:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_x},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_y}.$$

Nun kann aber unser Koordinatensystem um die  $Z$  Axe auch derart gedreht werden, dass die  $X$  und  $Y$  Axe in die Richtungen der Hauptkrümmungsradien fallen; bedeuten dann  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die beiden Hauptkrümmungsradien, so ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\rho_1};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\rho_2};$$

und zugleich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die beiden ausserdem noch zu bestimmenden Differentialquotienten  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$  und  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$  haben eine doppelte Bedeutung.

a) Schreibt man nämlich einerseits



$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y};$$

so ersieht man sogleich, dass sie die Schwereänderungen längs der  $X$  und  $Y$  Axe darstellen. Wenn nun in der Niveaufläche das Bogenelement  $ds$  senkrecht zur Linie der konstanten Schwere steht, so ist:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \cos \alpha;$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \sin \alpha;$$

mithin kann die Bestimmung der linksstehenden Differentialquotienten auf diejenige der Grössen  $\frac{\partial g}{\partial s}$  und  $\alpha$  zurückgeführt werden. Hierbei ist  $\frac{\partial g}{\partial s}$  das Maass der grössten Schwereänderung in der Niveaufläche selbst,  $\alpha$  der die Richtung dieser Aenderung charakterisierende Winkel.

b) Schreibt man aber andererseits:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z};$$

so gelangt man zur zweiten Deutung der linksstehenden Quotienten. In einem um  $z$  unter dem Anfangspunkte gelegenen Punkte kommen nämlich zu der in der  $z$  Richtung wirkenden Schwere noch die Beträge  $\frac{\partial X}{\partial z} z$  und  $\frac{\partial Y}{\partial z} z$ , so dass in diesem Punkte die Resultierende um die ihrer Kleinheit halber mit der Tangente zu vertauschenden Winkel

$$E_x = \frac{1}{g} \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \quad \text{und} \quad E_y = \frac{1}{g} \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$

von der  $Z$ -Axe abweicht. Geht man also in der Vertikalen um die Längeneinheit abwärts, so findet man in der  $XZ$ -, beziehentlich  $YZ$ -Ebene die angeführten Richtungsänderungen der Schwere gegen die  $Z$ -Axe. Wir haben somit das Maass der Richtungsänderung der Schwerkraft in der Vertikalen gewonnen.

Die fünf, zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe notwendigen Daten sind somit bestimmt, sobald die Hauptkrümmungsradien der Grösse und Richtung nach, ebenso die Schwereänderung der Grösse und Richtung nach in der Niveaufläche selbst bekannt sein werden. Da aber die Jolly'sche Wägung im Sinne der Gleichungen 4) schon den Wert von  $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$  ergibt, so genügt zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien die Beobachtung des Wertes  $\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}$ , von welcher weiter unten die Rede sein wird.

## 2. Die Methode.

Zur Lösung der nun genügend umschriebenen Aufgabe wurde die COULOMB'sche Waage benützt.

Verlegt man die  $Z$  Axe in die Axe des Aufhängedrahtes der Coulomb'schen Waage, so lässt sich das Drehungsmoment der Schwere auf den Wagebalken auf Grund der Gleichungen 1) und 3) in folgender Weise ausdrücken:

$$F = \int (Yx - Xy) dm = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \int xy dm + \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \int (x^2 - y^2) dm - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \int xz dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \int yz dm;$$

wo die Integration auf alle dem Drahte angehängten Massen zu erstrecken ist.

Legt man nun ein mit Wagebalken sich drehendes, mit ihm fest verbundenes Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  derart, dass die  $\zeta$ -Axe mit der Drehungsaxe  $Z$  des Aufhängedrahtes zusammenfalle,  $\xi$  im



Waagebalken mit der  $X$  Axe den Winkel  $\alpha$  bilde, so wird das Drehungsmoment:

$$\begin{aligned}
 F = & \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \\
 & + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha \int \xi \eta dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm - \\
 & - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} 2 \sin 2\alpha \int \xi \eta dm + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha \right) \int \xi \zeta dm - \\
 & - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \cos \alpha \right) \int \eta \zeta dm;
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

dessen Ausdruck für jede beliebige Gestalt des Waagebalkens gültig ist.

Für das vorgesteckte Ziel kamen zwei Arten des Waagebalkens in Anwendung. Die erste Form war die eines einfachen cylindrischen Stabes, an dessen Enden kugel- oder cylinderförmige Massen befestigt waren; in der zweiten Form war eine der Kugel- oder Cylindermassen am einen Ende des Stabes aufgehängt, daher tiefer liegend als die andere Masse.

Fällt die  $\xi$  Axe in die geometrische Axe des Stabes, so wird in beiden Fällen:

$$\begin{aligned}
 \int \xi \eta dm &= 0, \\
 \int \xi \zeta dm &= 0,
 \end{aligned}$$

und ausserdem im ersten Falle:

$$\int \xi \zeta dm = 0,$$

im zweiten Falle dagegen:

$$\int \xi \zeta dm = hlm,$$

wo  $l$  den Drehungsradius der aufgehängten Kugel,  $m$  deren Masse,  $h$  ihre vertikale Entfernung von dem Stabe, bezüglich von der am anderen Ende des Stabes befestigten Kugel bedeutet.

Untersuchen wir nun gesondert für beide Formen des Balkens die mechanischen Verhältnisse der Coulomb'schen Waage.

1) Im ersten Falle, da beide Kugeln an den Enden des Stabes in gleicher Höhe liegen, wird nach 5)

$$F = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm;$$

und legt man die  $X$  und  $Y$  Axe wie oben so, dass sie in die Richtung der Hauptkrümmungsradien fallen, wodurch  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$  wird, so wird einfacher:

$$F = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm.$$

Wir setzen nun abkürzungsweise:

$$\int (\xi^2 - \eta^2) dm = K',$$

und weiter:

$$\int (\xi^2 + \eta^2) dm = K,$$

desgleichen

$$\frac{K'}{K} = (1 - \varepsilon).$$

Hiebei bedeutet  $K$  das Trägheitsmoment des Stabes; ist derselbe länglich, so wird  $\varepsilon$  klein sein, in den meisten Fällen sogar ganz vernachlässigt werden können.

Erhält nun der Aufhängedraht der Coulomb'schen Waage durch das Drehungsmoment der Schwerkraft eine Torsion um den Winkel  $\vartheta$ , so wird

$$\tau \vartheta = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K (1 - \varepsilon) \frac{\sin 2\alpha}{2};$$

oder anders geschrieben:

$$\tau \vartheta = g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) K (1 - \varepsilon) \frac{\sin 2\alpha}{2};$$

da  $\tau \vartheta$  das infolge der Torsion auftretende Drehungsmoment darstellt.

In einer einzigen Stellung des Waagebalkens lässt sich nun zwar der Winkel  $\vartheta$  nicht ablesen; dreht man aber den Wage-



kasten mitsammt dem Torsionskopfe um eine vertikale Axe, so dass die Axe des Waagestabes mit der  $X$  Axe den von dem früheren verschiedenen Winkel  $\alpha'$  bilde, so verändert sich auch der Torsionswinkel des Aufhängedrahtes, und diese Veränderung von der Grösse  $\vartheta' - \vartheta$  kann mit Hülfe von an Stab und Kasten angebrachten Zeiger, oder besser durch Spiegelablesungen bestimmt werden.

Schon drei Stellungen des Wagebalkens genügen, um sowohl den Winkel  $\alpha$ , als auch den Wert von  $\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$  zu bestimmen. Jedoch erhält man ein übersichtlicheres und zur Berechnung geeigneteres Verfahren, wenn man die Waage in vier Lagen beobachtet, die einen Winkel von je  $45^\circ$  mit einander bilden.

Sei in der Anfangslage:

$$\vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

und senkrecht hierauf:

$$\vartheta' = - \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2},$$

In einer, von der anfänglichen um  $45^\circ$  abweichenden Richtung:

$$\vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\cos 2\alpha}{2},$$

und hierauf senkrecht:

$$\vartheta'_1 = - \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\cos 2\alpha}{2};$$

aus welchen Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\vartheta' - \vartheta = - \frac{K}{\tau} (1-\varepsilon) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha,$$

$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = - \frac{K}{\tau} (1-\varepsilon) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha;$$

und:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta'_1 - \vartheta_1},$$

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = \frac{\tau}{K(1-\varepsilon)} \sqrt{(\vartheta' - \vartheta)^2 + (\vartheta'_1 - \vartheta_1)^2};$$

wobei der ohnehin sehr kleine Wert von  $\varepsilon$  aus den Dimensionen des Balkens,  $\frac{\tau}{K}$  aber aus dessen Schwingungszeit bestimmt werden kann.

Im luftleeren Raume gilt nämlich für Schwingungen von unendlich kleiner Amplitude, unter dem alleinigen Einflusse der Elasticität, die Gleichung:

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T^2}.$$

Soll aber der Luftwiderstand und das aus der Schwereänderung entspringende Drehungsmoment Berücksichtigung finden, so schreiben wir die Differentialgleichung der Bewegung in der bekannten Form:

$$K \frac{d^2\omega}{dt^2} + H \frac{d\omega}{dt} + F\omega = 0,$$

wo  $\omega$  die Winkelongation,  $H$  eine von der Luftreibung abhängige Konstante, und  $K$ , wie früher, das Trägheitsmoment bedeutet. Hiermit wird die Elongation eines Punktes des Waagestabes:

$$\omega = ae^{-\beta t} \sin \pi \frac{t}{T},$$

wobei

$$\beta = \frac{H}{2K},$$

gesetzt wurde, und

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{F}{K} - \beta^2$$

ist. In unserem Falle wird

$$F = \tau - \frac{\partial F}{\partial \omega} = \tau - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K (1 - \varepsilon) \cos 2a,$$

und daher auch:

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2a - \beta^2.$$

Setzt man aber statt  $a$  den Wert  $a + \frac{\pi}{2}$ , was einer, auf die frühere senkrechte Stellung des Wagebalkens entspricht, s ergibt sich:



$$\frac{\pi^2}{T'^2} = \frac{\tau}{K} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha - \beta^2$$

und hieraus durch Addition :

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T^2} + \frac{1}{T'^2} \right) = \frac{2\tau}{K} - 2\beta^2;$$

was sogleich auf den Wert von  $\frac{\tau}{K}$  führt.

Zugleich ersieht man aber hieraus, dass die Beobachtung der Schwingungszeiten schon an und für sich zur Lösung der Aufgabe genügt.

Wir erhalten nämlich aus den für zwei aufeinander senkrechten Stellungen hier oben festgestellte Gleichungen :

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} \right) = 2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha,$$

und aus weiteren zwei aufeinander senkrechten, zu den früheren um  $45^\circ$  abstehenden Richtungen in derselben Weise :

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T_1'^2} - \frac{1}{T_1^2} \right) = 2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \sin 2\alpha;$$

woraus sowol die Richtung  $\alpha$  der Hauptkrümmungsradien, als der Wert

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) = g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$$

berechnet werden können.

Wenn man lediglich leichterem Uebersicht halber die bei den verwendeten Instrumenten ohnehin stets kleine Grösse  $\varepsilon$  vernachlässigt und die Schwingungszeit der nur in Folge der Elasticität des Drahtes schwingenden Waage mit  $T_0$  bezeichnet, so kann näherungsweise das Resultat unserer Ueberlegungen in folgender Weise ausgesprochen werden. Dreht man die Coulomb'sche Waage als Ganzes, mit Kasten und Torsionskopf in zwei zu einander um  $90^\circ$  geneigte Lagen, so erhält der Aufhängedraht eine Torsion von der Grösse :

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \sin 2\alpha;$$

und zugleich verändert sich die Schwingungsdauer des Stabes bei dieser Drehung um den Betrag:

$$T' - T = - \frac{T_0^3}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha = - \frac{T_0^3}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \cos 2\alpha.$$

Wie zu ersehen, wird  $\vartheta' - \vartheta$  ein Maximum für  $\alpha = 45^\circ$  und  $135^\circ$ ;  $T' - T$  ein Maximum für  $\alpha = 0$  und  $90^\circ$ , wobei zugleich die Relation besteht:

$$(T' - T)_{\max} = T_0 (\vartheta' - \vartheta)_{\max}.$$

2) Wir haben nun noch die zweite Form der Coulomb'schen Waage zu behandeln, bei derselben ist eine der Massen um  $h$  unter den Balken angebracht, somit ist, wie wir p. 199 fanden

$$\int \xi \zeta dm = m l h;$$

und somit:

$$\begin{aligned} I &= \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \\ &+ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha \right) h l m. \end{aligned}$$

Bringt man zunächst den Balken in die Richtung der  $X$  Axe, so dass  $\alpha = 0$  wird und dreht hierauf die Waage als Ganzes mit Kasten und Torsionskopf so lange, bis  $\alpha = \pi$  wird, dann erhält der Aufhängedraht, den wir nun zum Unterschiede von dem das untere Gewicht tragenden Drahte Torsionsdraht nennen wollen, eine Torsion  $(\vartheta' - \vartheta)$ , dessen Wert sich aus der vorhergehenden Gleichung, zu

$$\vartheta' - \vartheta = - \frac{2 h l m}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = - 2 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{h l m}{\tau}$$

berechnet. Bringt man aber den Balken zuerst in die Lage  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , hierauf  $\alpha = 3 \frac{\pi}{2}$ , dann wird die Torsion zwischen beiden Lagen ähnlich durch



$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = \frac{2hlm}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{hlm}{\tau}$$

gegeben. Da hiebei  $\frac{lm}{\tau}$  leicht entweder aus den Abmessungen des Instrumentes, oder der Ablenkung des hängenden Gewichtes durch die Anziehung einer von Aussen angebrachten Masse bestimmt werden kann, erhält man ohne weiteres  $\frac{\partial g}{\partial x}$  und  $\frac{\partial g}{\partial y}$ , die Horizontaländerungen der Schwere, mithin auch ihre Resultante nebst deren Richtung. Ausserdem bestimmt, wie wir wissen, p. 197, P. b):

$$E = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial s}$$

die Veränderung der Richtung der Schwere in der Verticalen.

3) Benützt man daher beide Formen der Coulomb'schen Waage nach den angegebenen Methoden, so gelangt man einerseits zur Kenntniss der Richtungen der Hauptkrümmungen der Niveaufläche, und der Differenz der Hauptkrümmungen  $\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)$ , andererseits zur Kenntniss der Veränderung der Schwere in der Niveaufläche selbst, sowohl der Grösse, als auch der Richtung nach. Da weiter die JOLLY'sche Wägemethode den Wert von  $\frac{\partial g}{\partial z}$  ergibt, so findet man mit Hülfe der aus Gleichung 4) entspringenden Relation:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = g \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) + 2\omega^2$$

auch die Summe der Hauptkrümmungen, mithin die Hauptkrümmungsradien  $\rho_1$  und  $\rho_2$ .

Ich bemerke zugleich, dass die vollständige Behandlung der Bewegung des in der Vertikalebene schwingenden Pendels in ähnlicher Weise, wie es hier für die Coulomb'sche Waage geschah, auch zur Bestimmung von  $\frac{\partial g}{\partial z}$  vorteilhaftere Methoden an die Hand gibt, als wir sie in der JOLLY'schen Wägung kennen. Die experimentale Verwirklichung dieser auf das Pendel mit langer Schwin-

ungsdauer bezüglichlichen Methoden scheiterte aber an den bekannten Schwierigkeiten, die jedem um eine Horizontalaxe sich drehenden Instrumente anhaften.

### 3. Die Instrumente.

Die besprochenen Messungen konnten natürlich mit der gewünschten Genauigkeit nur mit solchen Instrumenten ausgeführt werden, deren Empfindlichkeit der Kleinheit der zu messenden Kraftänderungen angepasst war. Um hierüber ein Urteil zu gewinnen, berechnen wir die zu messenden Grössen für eine schematische Erde, wie sie zur näherungsweisen Darstellung der Erdgestalt und der Schwere zu dienen pflegt. Ein solches Schema liefert unter andern LISTING's typisches Rotationssphaeroid, für welches

$$a=637\,736\,500\text{ C.};$$

und

$$b=635\,529\,800\text{ C.};$$

weiterhin

$$g_{\varphi}=978,0728(1+0,005\,201\,3\sin^2\varphi)$$

ist.

Für die Breite  $\varphi=47^{\circ}\,30'$  von Budapest erhält man hieraus die folgenden Werte:

$$g=980,838;$$

$$g\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right)=4\,836.10^{-12};$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}=7\,960.10^{-12};$$

$$E=\frac{\frac{\partial g}{\partial s}}{g}=8\,115.10^{-15};$$

oder

$$E=0,000\,001\,673$$

Bogensekunden, und endlich

$$\frac{\partial g}{\partial z}=3\,080.10^{-9}.$$



Die Torsion des Aufhängedrahtes der Coulomb'schen Waage erster Form wird ein Maximum, wenn die Stabaxe mit dem Meridian einen Winkel von  $45^\circ$  bildet. Zwischen zwei solchen zu beiden Seiten des Meridians gelegenen Stellungen ist die Torsion

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right);$$

also, wenn z. B.  $T_0 = 1000^s$  ist, so wird

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{1000^2}{\pi^2} \cdot 4\,836 \cdot 10^{-12} = 0,000\,490$$

was 1.7 Bogenminuten entspricht.

Bezeichnet man weiter die Schwingungszeit um den Meridian mit  $T$ , in der Ost-Westlinie mit  $T'$ , so wird:

$$T - T' = T_0 (\vartheta' - \vartheta) = 0,49^s,$$

etwa eine halbe Sekunde.

Für die zweite Form der Coulomb'schen Waage mit zwei in verschiedener Höhe angebrachten Massen wird die Torsion zwischen zwei auf den Meridian senkrechten Lagen des Balkens

$$\vartheta' - \vartheta = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{hlm}{\tau};$$

was mit den Abmessungen eines meiner Instrumente:  $h = 100\,C$ ,  $l = 13\frac{1}{3}\,C$ ,  $m = 30\,g$  und  $\tau = 0.4$  giebt,

$$\vartheta' - \vartheta = 2.7\,960 \cdot 10^{-12} \cdot 100\,000 = 0,001\,492,$$

was beiläufig 5 Bogenminuten entspricht.

Es ist hiemit klar, dass bei der Konstruktion für unseren Zweck genügend empfindlicher Instrumente das Hauptaugenmerk auf die Herstellung langer Schwingungsdauer gerichtet sein muss, und dieser Ueberlegung ist es zu danken, dass ich jene kleinen Kräfteänderungen nicht nur beobachten, sondern selbst messen konnte, die bislang unter Anwendung von Instrumenten kleiner Schwingungsdauer ganz unbemerkt bleiben mussten.

Meine Instrumente besitzen eine Schwingungsdauer von 10 bis 20, in manchen Fällen von noch mehr Minuten und bei die-

ser bisher kaum je erreichten Empfindlichkeit konnte sowohl die Gleichgewichtslage, als die Bewegung des Balkens wahrhaft bewunderungswürdig stabil, beziehentlich regelmässig gemacht werden, und dies nicht nur in gut geschützten Kellerräumen, sondern in jeder beliebigen Lokalität des Laboratoriums, ja sogar bei Nacht auch im Freien unter einem einfachen Leinwandzelte.

Der einzige Kunstgriff, — wenn dieses Wort benützt werden soll, — den ich anwendete, bestand darin, dass ich den Waagebalken in doppelwandige, denselben möglichst eng umschliessende Metallkasten aufhing. Im Laufe meiner Untersuchungen bediente ich mich verschieden geformter Kästen: bald eines horizontalen Rohres, welches den Wagebalken eng umschloss, bald eines länglichen flachen Parallelepipeds, bald eines niederen Kreiscylinders. Die letztere Form wurde als die vorteilhafteste befunden, da in ihr der Balken ganz frei schwingen kann, und in jeder Lage zu den Wänden des Kastens symmetrisch bleibt.

Die durch eine  $\frac{1}{2}$ —1 Centimeter dicke Luftschicht von einander getrennten Kastenwände bestehen aus 2—4 Millimeter dickem Messingbleche, und ebensolche doppelwandige, ebenso dicke und von einander getrennte Wände bilden auch das Rohr zur Aufnahme des Aufhängedrahtes. Auf diese Weise ist in dem inneren Kasten die Wirkung einseitiger Erwärmung möglichst verkleinert, und äussere Temperaturveränderungen dringen durch die allseits gleich dicken Metallwände und Luftschichten von allen Seiten fast gleichzeitig in den inneren Kastenraum hinein. Auch dürften in dem höchstens 2—3 Centimeter hohen inneren Schwingungsraum die Wirkung vertikaler Luftströmungen durchaus unmerklich bleiben. Nimmt man noch hinzu, dass auch die allseitig gut leitende Umkleidung äussere elektrische Einwirkungen vollkommen ausschliesst, so dürfte die, den bisherigen Erfahrungen gegenüber wohl Wunder nehmende Stabilität meiner so äusserst empfindlichen Waagen zur Genüge erklärt sein.

Der Balken hing meistens an einem 100—150 Centimeter langen Platindraht, der schon Monate vorher durch angehängte Gewichte gestreckt war. Der zumeist benützte Draht hatte einen Durchmesser von  $\frac{1}{25}$  Millimeter, eine Tragfähigkeit von 120—130 Gramm, während der daran schwingende Waagebalken 80—100



Gramm wog. Für eine Meterlänge des Drates war im Durchschnitt der Torsionskoeffizient  $\tau=0,3$  CGS.

Nach dem Beispiele Boys' stellte ich auch Versuche mit Quarzfäden gleicher Länge und Tragfähigkeiten an. Da dieselben sogleich nach ihrer Anfertigung eine ganz bewunderungswürdig konstante Elasticität besitzen, bieten sie entschiedene Vorteile, doch schien es mir geraten, bei meinen tragbaren Apparaten vorläufig noch die vorhergehend gestreckten Platindräte beizubehalten, da die bei ihrer grossen Tragfähigkeit ziemlich starren Quarzfäden gar zu leicht brechen. Auch ist ihre Empfindlichkeit geringer als die der Platinfäden; es gelang mir kaum einen Quarzfaden von 100 Gramm Tragfähigkeit herzustellen, dessen Torsionskoeffizient  $\tau$  für ein Meter Länge kleiner gewesen wäre, als die Einheit. Meine mehrere Monate hindurch gestreckten und schwerbelasteten Platindräte zeigten ebenfalls durchaus genügende Konstanz, und wenn sie auch nach der Neuaufrichtung der Wage einigen Gang aufweisen, so konnte dieser seiner Regelmässigkeit wegen leicht in Rechnung gezogen werden.

Da sich im Laufe meiner Untersuchungen die Zahl meiner Instrumente bedeutend mehrte, mögen dieselben, um sie leichter unterscheiden zu können, besonders benannt werden.

Die Coulomb'sche Waage erster Form, welche den Wert von  $G \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)$  ergibt, möge *Krümmungsvariometer*, die Waage zweiter Form, welche die Schwereänderung in der horizontalen und zugleich die Richtungsänderung der Schwere nach unten anzeigt, möge *Horizontalvariometer* genannt werden.

An dieser Stelle soll nur das Wesentliche über die Einrichtung dieser Instrumente hervorgehoben werden.

1. Das *Krümmungsvariometer* (Fig. 1 u. 2) besteht aus einem cylindrischen Waagekasten, welcher in einem starken Holzringe an diesen befestigten Metallarmen ruht. Zur horizontalen Einstellung des Kastens dienen drei Metallschrauben. Der Holzring selbst steht auf drei 120 Centimeter hohen Spreitzfüssen. Der cylindrische Waagekasten ist um eine vertikale Axe über einem getheilten Kreise drehbar. Am untern Ende des den Aufhängedrat einschliessenden Rohres befindet sich ein rundes Fenster, dessen eine Hälfte durch

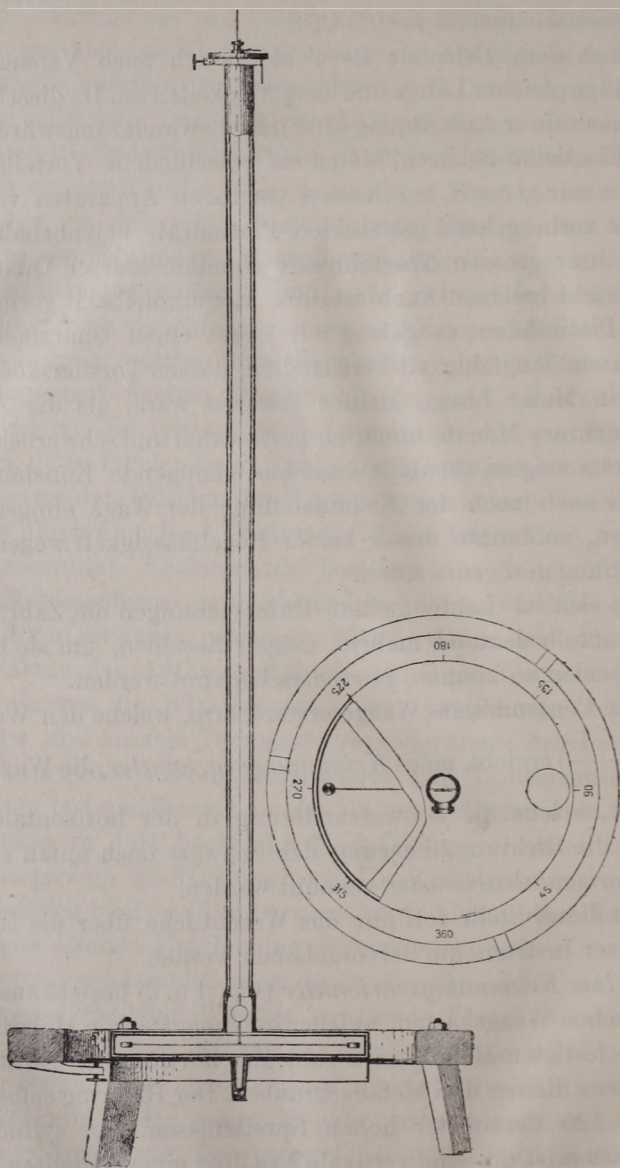


Fig. 1. und 2.



einen an das Rohr befestigten, fixen Spiegel verdeckt ist, während die andere Hälfte den auf dem schwingenden Balken befestigten Spiegel sehen lässt. Der fixe, am Rohr befestigte Spiegel lässt sich durch Stellschrauben so einstellen, dass das Bild einer vor das Fenster gestellten Skale zugleich mit dem Bilde des schwingenden Spiegels im Gesichtsfelde des Ablesefernrohres erscheine. Die Verschiebung der beiden Spiegelbilder gegeneinander dient zur Abmessung des Torsionswinkels  $\delta' - \delta$ . Am Ende des Balkens liegen cylindrische Gewichte von je 30 Gramm, ihre Mittelpunkte stehen von einander um 34 C. ab. Der innere Durchmesser des Kastens beträgt 40 C. seine Höhe 2 C. Die Deckel sowohl des innern als äusseren Kastens sind abhebbar. Der 150 Centimeter lange Drat ist an beiden Enden an Metallplättchen gelötet, die mittels Schrauben einerseits an die Stange des Torsionskopfes, andererseits an den Wagebalken befestigt wurden.

2. Das *Horizontalvariometer* (Fig. 3 und 4) ist auf einer 140 C. hohen mit einem Kreuzgestelle verbundenen Säule drehbar angebracht. Der Kasten ist wie oben cylinderförmig und trägt auf seinem oberen Deckel eine Boussole zur Bestimmung seiner Drehung. Das dem einen Ende des Waagebalkens angehängte cylindrische Gewicht ist in ein doppelwandiges Rohr geschlossen, welches durch an dem Boden des Kastens angebrachte Stellschrauben vertikal eingestellt werden kann. Die zur Ablesung der Torsion dienenden Spiegel sind ganz so eingerichtet, wie es vorher beschrieben wurde. Der

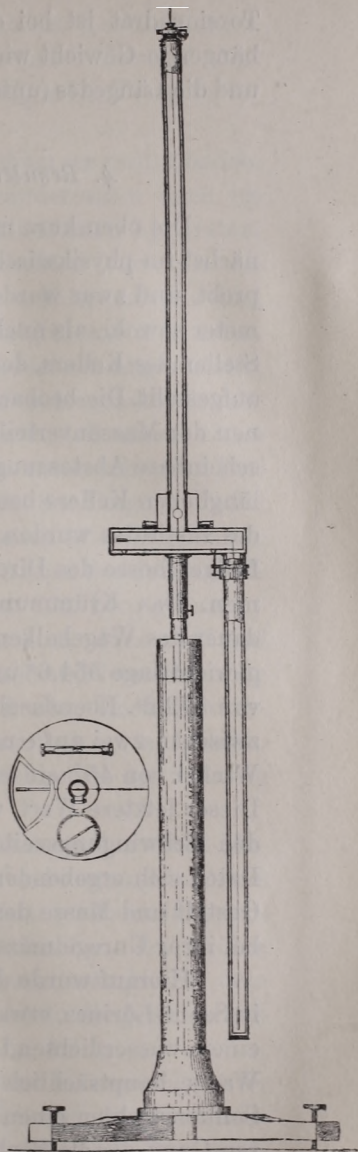


Fig. 3. und 4.

Torsionsdrat ist bei diesem Instrumente 40 Centimeter lang, das hängende Gewicht wiegt 30 Gramm, sein Drehungsarm ist 13.2 C und die Längedes (unteren) Aufhängedrates beträgt 100 Centimeter.

#### *4. Resultate der bisherigen Messungen.*

Die oben kurz mitgeteilten Messungsmethoden wurden zunächst im physikalischen Institute der Budapester Universität erprobt, und zwar wurden beide Instrumente, das Krümmungvariometer sowohl, als auch das Horizontalvariometer an verschiedenen Stellen des Kellers, des Erdgeschosses und des ersten Stockwerkes aufgestellt. Die beobachteten Variationen entsprachen im Allgemeinen der Massenverteilung des Gebäudes, und besonders war die scheinbare Abstossung des unter dem Gebäude sich hinziehenden länglichen Kellers bemerkbar. Die ersten Messungen ausserhalb des Institutes wurden am Fusse des Blocksberges bei Ofen im Erdgeschosse des Directionsgebäudes des Bruckbades vorgenommen. Das Krümmungsvariometer ergab hier als Schwingungsdauer des Wagebalkens um die gegen den Berg gerichteten Gleichgewichtslage  $564,6^s$  und darauf senkrecht die Schwingungsdauer von  $572,2^s$ . Ebendasselbst betrug die Torsion des Aufhängedrates zwischen zwei auf einander senkrechten, mit den vorherigen einen Winkel von  $45^\circ$  einschliessenden Richtungen 45 Bogenminuten. Dieser letztere Wert weicht kaum um eine Minute von dem aus den Schwingungszeiten berechneten Werte ab. Die aus diesen Daten sich ergebenden Variationen der Schwere entsprechen der Gestalt und Masse des Berges, soweit man diese beiden Faktoren bei ihrer Unregelmässigkeit überhaupt in Rechnung ziehen kann.

Hierauf wurde das Horizontalvariometer in meinem Garten in Szent-Lőrincz, etwa 8 Kilometer von Budapest, im Freien, unter einem wasserdichten Leinwandzelte aufgestellt. Bei Tage zeigte die Waage, hauptsächlich unterder Wirkung der auf das Zelt fallenden Sonnenstrahlen einen fortdauernden bald langsamen, bald raschen Gang, der die Beobachtung unmöglich machte. Nachtsüber dagegen gestaltete sich alles günstiger: der Wagebalken nahm seine Gleichgewichtslage so sicher und stabil an, wie früher im Laboratorium.



Die während mehrerer Nächte fortgesetzten Beobachtungen ergaben ein unter sich durchaus gut stimmendes Resultat. Namentlich war die Wirkung des sanft ansteigenden Terrains bemerklich, auf dem mein Garten liegt.

Nach diesen vorbereitenden Studien schien es nun möglich, systematische Beobachtungen der Schwereänderungen auch im Freien anzustellen. So begaben sich denn mit meinen Apparaten, und dazu gehörenden tüchtigen Leinwandzelten versehen die Herrn Prof. LUDWIG v. BODOLA, Dr. RUDOLF v. KÖVESLIGETHY und KARL TANGL, denen später ich selber nachfolgte, auf den neben Kis-Czell sich erhebenden Ságberg. Derselbe ist ein abgestutzter, aus der Ebene isolirt bis 150 Meter Höhe aufragender Basaltkegel, dessen Gestalt und ziemlich homogene Gesteinsmasse einen verhältnissmässig einfachen und leicht zu untersuchenden Fall der Massenanziehung verwirklicht. Zudem ist der Berg gerade für das Studium der Schwereänderungen auch schon aus dem Grunde besonders interessant, da der unermüdliche Altmeister der Pendelmessungen, Oberstlieutenant R. v. STERNECK, den Berg genau erforschte und zu dem Resultate zu kommen schien, dass zwei auf dem flachen Plateau des Berges nahe in demselben Niveau liegende und von einander nur 150 Meter entfernte Punkte einen Schwerunterschied gleich dem  $\frac{1}{30000}$ -tel des Gesamtbetrags aufwiesen. Eine so grosse Veränderung könnte unsere Theorie der Schwere kaum erklären.

Obwohl die obgenannten Herren über ihre nach meinen Methoden auf dem Ságberge angestellten Beobachtungen besonders berichten werden, glaube ich doch soviel schon jetzt erwähnen zu sollen, dass nach diesen Beobachtungen zwischen den beiden STERNECK'schen kritischen Punkten Schwereänderungen in dem angeführten Betrage nicht bestehen, dass vielmehr die gewonnenen Resultate mit der Theorie in bestem Einklang stehen.

Es mag noch erwähnt werden, dass das Krümmungsvariometer auch zur Beantwortung der Frage beigezogen wurde, ob die materielle Constitution der Körper auf die von der Erdmasse erlittene Anziehung Einfluss habe?

Werden zu diesem Zwecke an den beiden Enden des Waagebalkens Körper verschiedener Substanz, z. B. Kupfer und Kork be-

festigt, so müsste sich nach einer Drehung der Wage um  $180^\circ$  der etwaige Einfluss in der Richtungsänderung der Schwere fühlbar machen. Da aber meine diesbezüglichen Untersuchungen selbst mit diesen ausserordentlich empfindlichen Methoden keine merklichen Unterschiede in der Richtung der Schwere ergaben, fühle ich mich zu dem Schlusse berechtigt, dass die Erdanziehung für jene Stoffe dieselbe ist, oder doch höchstens eine weit ausserhalb der Grenzen des Beobachtbaren liegende Verschiedenheit zeige. Die Unterschiede in der Massenanziehung müssten sich nämlich auch in den Unterschieden der Schwererichtung offenbaren, da ja die Schwere die Resultante der Massenanziehung und der von stofflichen Beschaffenheiten unabhängigen Centrifugalkraft ist. So konnte ich zum Schlusse gelangen, «dass wenn überhaupt eine Differenz in der Schwere der Körper von gleicher Masse, jedoch verschiedener Substanz vorhanden wäre, diese in Bezug auf Messing, Glas, Antimonit und Korkholz jedenfalls kleiner sein müsste, als ein zwanzigmillionstel, in Bezug auf Luft und Messing aber gewiss kleiner als ein Hunderttausendstel». (S. Math. u. Naturw. Berichte in Ungarn VIII. p. 65, 1890; Beiblätter zu WIEDEMANN'S Annalen der Ph. u. Ch. 1891. Seite 688.)

## II. Ueber die Messung der räumlichen Aenderungen der erdmagnetischen Kraft.

Ich stellte mir weiter die Aufgabe, die räumlichen Aenderungen der erdmagnetischen Kraft in eben solcher Vollständigkeit messbar zu machen, die ich in Bezug auf die Schwerkraft mit gutem Erfolge anstrebte.

Die Komponenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  der auf die Einheit magnetischer Flüssigkeit wirkenden Kraft (magnetische Intensität) lassen sich unter entsprechender Deutung ebenfalls durch die Gleichungen 1) der I. Abteilung ausdrücken; bedenkt man ferner, dass auch diese Kraft eine Potentialfunktion besitzt, so übersehen wir sogleich, dass die vollständige Lösung der Aufgabe die Bestimmung der folgenden sechs Daten erheischt:



$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z};$$

zwischen denen für ausserhalb der wirkenden magnetischen Massen gelegene Punkte die Beziehung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

besteht.

Bei der oben bezeichneten Aufgabe ist unser Augenmerk in erster Linie auf diejenige translatorische Kraft zu richten, welche sich als die ganze auf einen Magnet wirkende Kraft dann zu erkennen giebt, wenn wir die Empfindlichkeit der Beobachtung soweit steigern, dass sie die magnetischen räumlichen Intensitätsänderungen verrät. In der Tat betrachtete ich auch als zunächst anzustrebendes Ziel die Messung dieser translatorischen Kraft.

Auf Grund der Gleichung 1) der vorhergehenden Abteilung lassen sich die Komponenten  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  der translatorischen Kraft  $P$  leicht für einen Magnet berechnen, dessen Moment durch die Komponenten  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  gegeben ist. Man hat nämlich:

$$\begin{aligned} P_x &= M_x \frac{\partial X}{\partial x} + M_y \frac{\partial X}{\partial y} + M_z \frac{\partial X}{\partial z}, \\ P_y &= M_x \frac{\partial Y}{\partial x} + M_y \frac{\partial Y}{\partial y} + M_z \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ P_z &= M_x \frac{\partial Z}{\partial x} + M_y \frac{\partial Z}{\partial y} + M_z \frac{\partial Z}{\partial z}. \end{aligned} \quad 1)$$

Zunächst legen wir unser Koordinationssystem derart, dass die Z-Axe nach abwärts, die X-Axe in den magnetischen Meridian nordwärts, die Y-Axe in die magnetische erste Vertikale ostwärts zu liegen komme. Beschränken wir uns einstweilen auf den Fall, wo die Axe des Magneten mit dem magnetischen Meridian den sehr kleinen Winkel  $\varepsilon$  einschliesst, so können wir die uns hier ausschliesslich interessirenden Horizontalkomponenten der erdmagnetischen Kraft in folgende Form bringen:

$$P_x = M_h \frac{\partial X}{\partial x} + M_h \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial X}{\partial z};$$

$$P_y = M_h \frac{\partial Y}{\partial x} + M_h \frac{\partial Y}{\partial y} \varepsilon + M_v \frac{\partial Y}{\partial z};$$

wenn  $M_h$  und  $M_v$  die horizontale, beziehentlich vertikale Komponente des magnetischen Momentes bezeichnen.

Zur Messung dieser horizontalen Kräftekomponenten benütze ich ein auf dem Princip der Coulomb'schen Waage beruhendes Instrument, welches das *magnetisches Translatometer* genannt werden mag, und welches durch die Fig. 5 in vertikalem, durch die Fig. 6 in horizontalem Durchschnitte dargestellt wird. Der äusseren Form nach ähnelt das Instrument dem Horizontalvariometer, doch hängt am Ende des Waagebalkens ein Magnetstab, dessen Neigung gegen der Horizontalen verändert werden kann. Des Weiteren geschieht die Drehung dieser Waage nicht um die vertikale Mittelaxe des Waagebalkens, sondern um dessen Ende, beziehentlich um jenes Vertikalrohr, in welchem der Draht des aufgehängten Magneten geborgen ist. Sowohl dieses Rohr, als auch der an dessen Ende den Magnet umschliessende Kasten bestehen aus eisenfreiem Kupfer. Bei diesem Instrumente ist auf feinere Teilung des Torsionskopfes mehr Gewicht zu legen, und es ist wünschenswert an demselben wenigstens die Minute ablesen zu können. Die Drehung des Waagekastens als Ganzes ist ebenfalls an einer Kreisteilung ablesbar, die Ablenkung des Waagebalkens gegen den Kasten und den Torsionskopf durch Spiegelablesung messbar.

In der Fig. 7 bezeichnet  $OA$  den Waagebalken,  $C$  den Fusspunkt des denselben tragenden Drahtes. Die Drehung der Waage geschieht um den Punkt  $O$  derart, dass der Punkt  $C$ , mithin auch der Torsionskopf den Kreis vom Radius  $OC=l$  beschreibt.

Dieses Instrument wird zur Messung der translatorischen Kraft folgenderweise benützt:

Durch geeignete Aufstellung des Kastens und Rectification des Aufhängedrahtes mittels des Torsionskopfes wird der Waagebalken in die, auf dem magnetischen Meridian senkrechte Lage  $OCA$  gebracht (Fig. 7), und zwar so, dass der unten aufgehängte Magnet mit dem magnetischen Meridian einen der Null möglichst



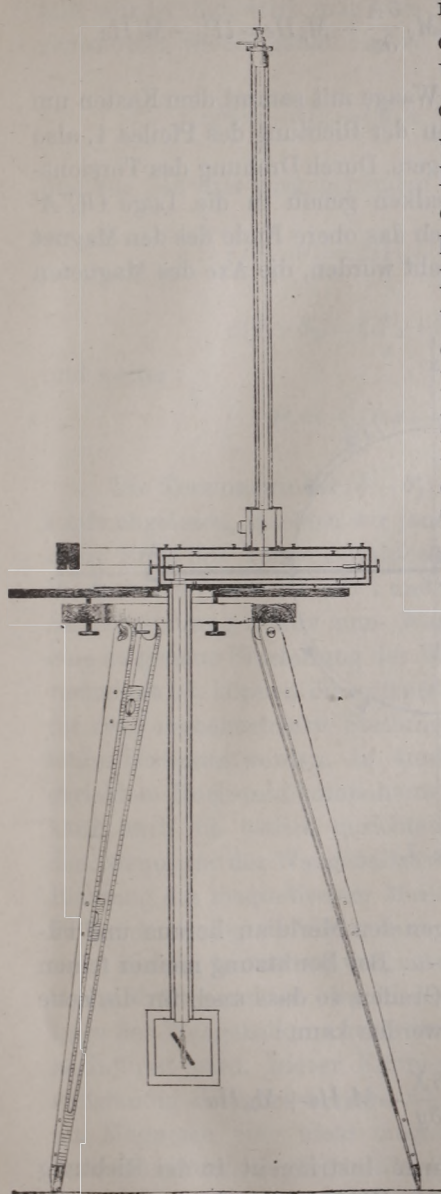


Fig. 5.

nahe kommenden Winkel ( $\varepsilon$ ) einschliesse. Der obere, den Waagebalken tragende Draht, der kurz Torsionsdraht genannt werden möge, wird in diesem Falle durch zwei Kräfte tordirt; die eine ist die  $X$ -oder Meridiankomponente der translatorischen Kraft, die am Hebelarme  $l$  wirkt, die andere die Drehkraft des hängenden Magneten unter Einfluss der horizontalen Komponente  $H$  der erdmagnetischen Intensität. In dieser Stellung des Waagebalkens ist mithin der Torsionsdraht gedreht, und bezeichnet wieder  $\vartheta$  den Torsionswinkel, so hat man im Falle des Gleichgewichtes:

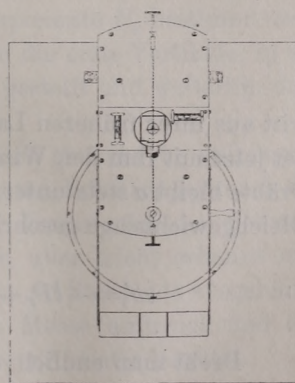


Fig. 6.

$$\tau\vartheta = lM_h \frac{\partial X}{\partial x} + lM_h \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + lM_v \frac{\partial X}{\partial z} - M_h H \varepsilon = lP_x - M_h H \varepsilon.$$

Nun drehe man die ganze Waage mit sammt dem Kasten um 180 Grade, und zwar zunächst in der Richtung des Pfeiles 1, also entgegen dem Gange des Uhrzeigers. Durch Drehung des Torsionskopfes wird hierauf der Wagebalken genau in die Lage  $OC'A'$  gebracht. Dabei ist natürlich auch das obere Ende des den Magnet tragenden Drates um  $180^\circ$  gedreht worden, die Axe des Magneten

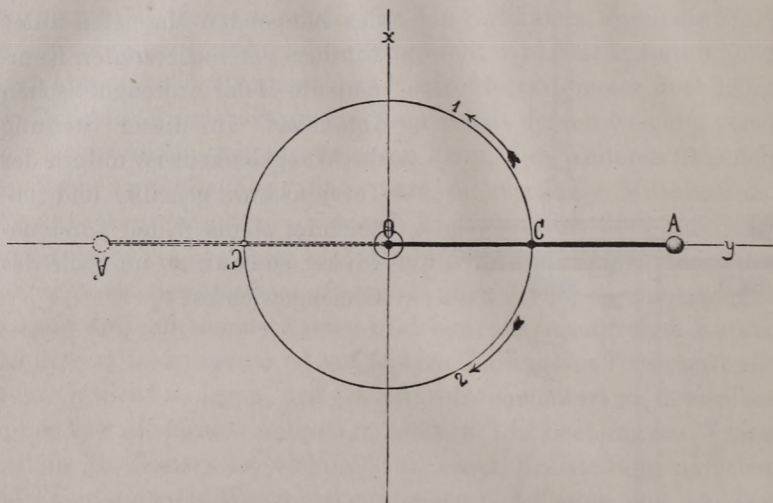


Fig. 7.

tritt aus ihrer früheren Lage gegen den Meridian heraus und bildet jetzt mit ihm den Winkel  $\varepsilon - \alpha$ . Bei Benützung meiner feinen Drähte bleibt  $\alpha$  stets unter 1—2 Graden, so dass auch für die neue Gleichgewichtslage geschrieben werden kann:

$$\tau\vartheta'_1 = -lP_x + lM_h \alpha \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H \varepsilon + M_h H \alpha.$$

Dreht man endlich das ganze Instrument in der Richtung des Pfeiles 2, durch die erste Lage  $OCA$  hindurch wieder in die Lage  $OC'A'$ , wobei natürlich der Wage eine volle Umdrehung er-



teilt wurde, und stellt man den Waagebalken mit Hilfe des Torsionskopfes wieder genau ein, so hat man :

$$\tau \vartheta'_2 = -lP_x - lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H \varepsilon - M_h H a,$$

und aus den drei vorangehenden Gleichungen ergibt sich :

$$\tau (\vartheta - \vartheta'_1) = 2lP_x - lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H a,$$

$$\tau (\vartheta - \vartheta'_2) = 2lP_x + lM_h a \frac{\partial X}{\partial y} + M_h H a,$$

und weiter :

$$P_x = \frac{\tau}{4l} ((\vartheta - \vartheta'_1) + (\vartheta - \vartheta'_2)).$$

Die Torsionswinkel  $(\vartheta - \vartheta'_1)$  und  $(\vartheta - \vartheta'_2)$  werden am Torsionskopfe abgelesen, insofern wir jene Winkel suchen, um welche das obere Ende des Torsionsdrahtes gedreht werden muss, um den Waagebalken nach den mit 1 und 2 bezeichneten Drehungen in die Anfangsstellung relativ zum Waagekasten zu bringen. Insofern eine so genaue Einstellung des Waagebalkens mit Schwierigkeiten verknüpft ist, können die entsprechenden Torsionswinkel aus den für zwei engbenachbarte Stellungen gültigen Daten durch Interpolation bestimmt werden. In ähnlicher Weise, wie die nordwärts gerichtete Horizontalkomponente der translatorischen Kraft,  $P_x$ , kann auch die östlich gerichtete Komponente  $P_y$  bestimmt werden, wenn nur der Waagebalken statt in die erste Vertikale, in die Richtung des magnetischen Meridians gestellt und weiterhin dem Früheren analog verfahren wird.

Bislang hatten wir unser Augenmerk blos auf die erdmagnetische Kraft gerichtet, obwohl den früheren Erfahrungen nach die Lage des Waagebalkens auch durch die Variationen der Schwere beeinflusst wird. Dieser Einfluss kann aber leicht erkannt und vollständig eliminiert werden, wenn man an Stelle des ausgehängten Magneten eine nicht magnetische Masse anbringt und das Instrument nun als Horizontal-Schwerevariometer benützt.

Die Bestimmung der Komponenten der magnetischen Translationskraft können zugleich zur Kenntniss der räumlichen Inten-

sitätsänderung führen, und zwar am vorteilhaftesten auf die Weise, dass man die Messung zuerst mit einem abwärts, dann mit einem aufwärts geneigten Magnete vornimmt. Ist z. B. der Neigungswinkel der Magnetaxe gegen die Horizontale zuerst  $i$  dann  $-i$ , dann ist für den ersten Fall:

$$M_h = M \cos i, \quad M_v = M \sin i;$$

für den zweiten Fall dagegen

$$M'_h = M \cos i, \quad M'_v = -M \sin i.$$

Indem wir eine genaue Einstellung voraussetzen, so dass  $\varepsilon = 0$  genommen werden darf, dann werden die Horizontalkomponenten der Translationskraft bei abwärts geneigtem Magnete:

$$P_x = M \cos i \frac{\partial X}{\partial x} + M \sin i \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P_y = M \cos i \frac{\partial Y}{\partial x} + M \sin i \frac{\partial Y}{\partial z},$$

und ähnlich für den zweiten Fall, nämlich den eines aufwärts geneigten Magnets:

$$P'_x = M \cos i \frac{\partial X}{\partial x} - M \sin i \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$P'_y = M \cos i \frac{\partial Y}{\partial x} - M \sin i \frac{\partial Y}{\partial z},$$

woraus durch passende Verknüpfung sofort die Werte der gesuchten Aenderungen in der Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{P'_x + P_x}{2M \cos i},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{P_x - P'_x}{2M \sin i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{P_y + P'_y}{2M \cos i},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{P_y - P'_y}{2M \sin i},$$

folgen.



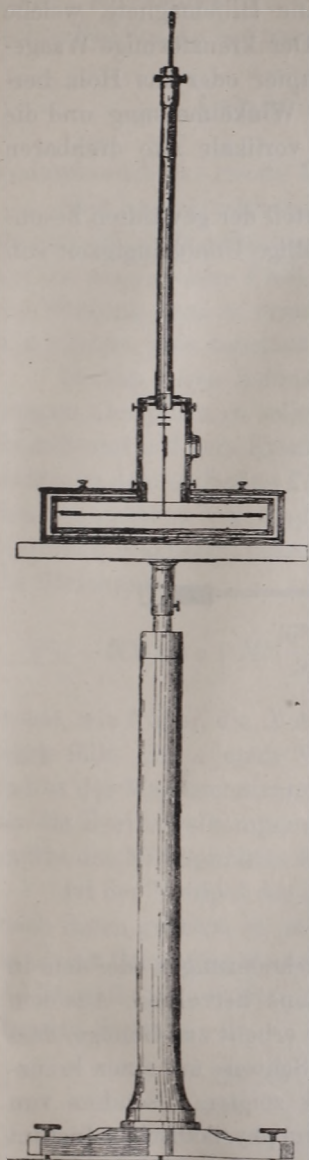


Fig. 8.

Von den sechs, zur vollständigen Lösung der vorgelegten Aufgabe notwendigen Bestimmungsstücken sind somit auf dem vorher beschriebenen Wege vier Daten gewonnen, und somit bleiben noch zwei, oder mit Hinsicht auf die Gleichung  $\Delta^2 V = 0$ , noch ein Stück unbekannt.

Diesem Zwecke dient das *astatische Variometer*, dessen einfachen Bau die Figur 8 im vertikalen, die Figur 9 im horizontalen Durchschnitte darstellt. Auch dieses Instrument ist eine Coulomb'sche Waage, an dessen feinem Drate ein aus leichten Aluminiumröhren zusammengesetztes Kreuz hängt. Die Enden der Kreuzbalken tragen vier sich gegenseitig möglichst astatisirende Magnete derart, dass zwei sich gegenüber stehende Magnete die Nordpole nach aussen, die andern beiden nach innen kehren, wie dies auch die umstehende Figur 10 versinnlicht. Zur mög-

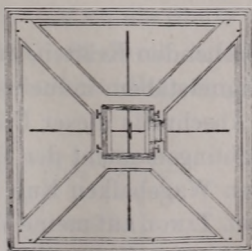


Fig. 9.

lichst genauen Astasirung dienen kleine Hilfsmagnete, welche auf den Balken gelegt werden können. Der kreuzförmige Waagebalken sowohl, als aus eisenfreiem Kupfer oder aus Holz hergestellte Waagekasten trägt Spiegel zur Winkelmessung und die ganze Waage ruht auf einem um eine vertikale Axe drehbaren Tische.

Ein nicht zu unterschätzender Vorteil der gewählten besonderen Form des Waagebalkens ist die völlige Unabhängigkeit von

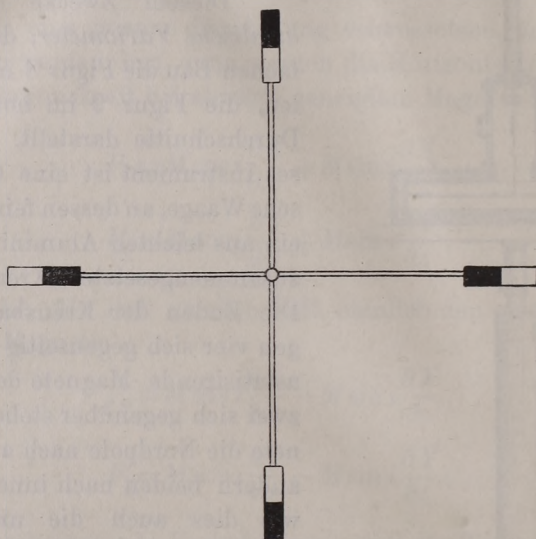


Fig. 10.

allen drehenden Kräften, die aus Schwereänderungen oder dem in den Magnetstäben inducirten Magnetismus herrühren. Aus dem ersten Abschnitte dieser Untersuchungen erhellt zur Genüge, dass das Drehungsmoment der Variation der Schwere auf einen kreuzförmigen Waagebalken Null wird. Weiters zeigten besondere von Dr. KARL TANGL auf meine Veranlassung im physikalischen Institut der Budapester Universität gerade zu diesem Zwecke angestellten Versuche, dass die Induction der erdmagnetischen Kraft einem astatischen Nadelpaare ein Drehungsmoment erteilt, das in der



Form  $C \sin \alpha$  dargestellt werden kann. Für zwei aufeinander senkrechte Nadelpaare hat man sohin:

$$C \sin 2\alpha + C \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

wodurch auch der zweite Teil unserer Behauptung erhärtet wird.

Man braucht also bei der Berechnung des Drehungsmomentes eines ähnlich gebauten kreuzförmigen Waagebalkens durchaus nur die magnetische Kraft in Rücksicht zu nehmen und kann deren Wirkung ganz so bemessen, als ob die Magnete frei von Induction blieben, also konstant wären.

In dem engen Rahmen dieses Berichtes glaube ich die Rechnungen übergehen zu sollen, welche ich für Magnete beliebiger Gestalt und auf dem Kreuze eingenommener beliebiger Lage anstellte. In dem einfachen Falle, wenn die Axen der Magnete parallel den Kreuzstäben liegen, gilt für das Drehungsmoment desjenigen einzelnen Magneten, dessen Nordpol nach Aussen gerichtet ist, die Gleichung:

$$F = -HM \sin \alpha + Ml \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha ;$$

wobei, wie früher, die  $X$ -Axe in den magnetischen Meridian nordwärts fällt, und  $\alpha$  jenen Winkel bezeichnet, den der Drehungsradius des Magnetencentrums mit der  $X$ -Axe einschliesst.  $H$  ist weiter die Horizontalkomponente der Intensität und  $l$  der Drehungsradius des Mittelpunktes des Magnetstabes.

Ist der Nordpol des auf dem Kreuzarm liegenden Magneten nach innen gekehrt, so hat man einfach  $-M$  an die Stelle von  $M$  in obiger Gleichung zu setzen. Man erhält so durch betreffende Addition für das Drehungsmoment des aus vier Magneten bestehenden Systems:

$$F = -H\mu \sin \gamma + (M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4) \cdot \left( \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right)$$

wo  $\mu$  das Gesamtmoment der aus vier Magneten bestehenden nahezu astatischen Kombination bedeutet, und  $\gamma$  der noch unbe-

kannte Winkel ist, den die magnetische Axe dieses zusammengesetzten Magneten mit der  $X$  Axe einschliesst.  $M_1, M_2, M_3, M_4$  bezeichnen die Absolutwerte der Momente der einzelnen Magnete,  $l_1, l_2, l_3$  und  $l_4$  die Drehungsradien ihrer Mittelpunkte.

Setzt man nun Kürze halber:

$$M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4 = 4Ml;$$

was vier gleichmomentigen und auf dem Kreuze von der Drehungsaxe in gleicher Entfernung angebrachten Magneten entsprechen würde, und berechnet die Drillung des Torsionsdrahtes in den durch die verschiedenen Werte von  $\alpha$  gekennzeichneten Stellungen, so erhält man die folgende Tabelle:

$$\alpha=0 \quad \tau \vartheta_0 = -\mu H \sin \gamma + 8Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

$$\alpha=\pi \quad \tau \vartheta_\pi = +\mu H \sin \gamma + 8Ml \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \tau \vartheta_{\frac{\pi}{4}} = -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}} (+\sin \gamma + \cos \gamma) + 4Ml \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right);$$

$$\alpha = 3\frac{\pi}{4} \quad \tau \vartheta_{\frac{3\pi}{4}} = -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \gamma + \cos \gamma) - 4Ml \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right);$$

aus welcher sich durch geeignete Kombination:

$$2\mu H \sin \gamma = \tau (\vartheta_\pi - \vartheta_0)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \mu H \sin \gamma - 8Ml \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \tau \left( \vartheta_{\frac{3\pi}{4}} - \vartheta_{\frac{\pi}{4}} \right)$$

ergiebt. Misst man also auf eine früher schon ausführlich erörterten Weise die Torsionswinkel des Aufhängedrahtes zwischen den vier angegebenen Lagen, so erhält man hieraus den Wert der noch fehlenden Angabe  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$ .

Es könnten natürlich zu eben diesem Zwecke auch andere vier Lagen gewählt werden, ja durch Hinzuziehung einer fünften Stellung wäre auch der Wert von  $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$  messbar. Die mit dem Translatometer angestellten Messungen machen dies jedoch über-



flüssig, da die Aufgabe durch den Wert von  $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)$  zusammen mit der Gleichung  $\Delta^2 V = 0$  und den früheren Resultaten vollständig gelöst ist.

Um beurteilen zu können, wie hoch die Empfindlichkeit meiner Instrumente gesteigert werden kann, möge ein Beispiel angeführt werden. Nach unserem magnetischen Karten vergrößert sich die Horizontalkomponente der erdmagnetischen Intensität um beiläufig 0,001 C. G. S., wenn man von Budapest um 20 Kilometer nach Süden geht. Es kann daher beiläufig gesetzt werden:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{0,001}{2\,000\,000} = 5 \cdot 10^{-10}.$$

Der Draht meines magnetischen Translatometers erlaubt die Aufhängung eines Magneten von 30—35 Gramm Gewicht, dessen Moment  $M = 1000$  gesetzt werden kann; da weiter der Drehungsradius des Magneten  $l = 20$  c, die Torsionskonstante des Drahtes  $\tau = 0,25$  ist, so kann, von anderen Veränderungen abgesehen, der Torsionswinkel, p. 218:

$$\vartheta = \frac{l}{\tau} M \frac{\partial X}{\partial x} = 0,000\,04$$

gesetzt werden. Bei einer Drehung des Instrumentes um  $180^\circ$  wächst dieser Winkel auf das Doppelte, beträgt also rund  $\frac{1}{4}$  Bogenminute.

Meine Instrumente entstanden nicht aus dem Wunsche, mit ihnen der kartographischen Aufnahme der magnetischen Elemente eines Landes oder gar Erdtheiles zu dienen, sondern sie sollen vielmehr nur jene Veränderungen kundgeben, welche nahe Massen, Berge, Täler oder unterirdische magnetisch wirkende Gesteine in der erdmagnetischen Kraft bewirken. In diesem Sinne mögen sie der Geologie gute Dienste leisten, begnügen sich aber in diesem Falle schon mit einer bedeutend kleineren Empfindlichkeit. So reichte bei den Messungen, die ich bisher im physikalischen Laboratorium und später im Herbste des Jahres 1895 in meinem in Szt.-Lőrincz gelegenen Garten anstellte, stets schon die Aufhängung solcher Magneten völlig aus, deren Moment bloß 200 C. G. S.

betrug, deren Empfindlichkeit also  $\frac{1}{5}$  der im Beispiele angeführten Empfindlichkeit ausmachte.

Im physikalischen Laboratorium erhielt ich auch so noch auf mehrere Grade sich belaufende Torsionen. In Szent-Lőrincz beobachtete ich im Freien unter Zelten, gerade so, wie mit dem Schwerevariometer, und zwar zumeist bei Nacht; an trüben, regnerischen Tagen konnte auch tagsüber gut beobachtet werden.

Ich halte meine Methode besonders zum Studium der nahe unter der Erdoberfläche cirkulirenden elektrischen Erdströme für besonders geeignet, da diese nun selbst an Ort und Stelle, nicht aber, wie es früher geschah, blos in den bekannten Plattenleitungen erforscht werden können. Entfernt man nämlich an einem Orte, wo die erdmagnetischen Aenderungen schon gemessen wurden, einen Teil der umliegenden Bodenmassen, z. B. durch Aushebung eines Grabens, so werden die infolge dessen sich in der magnetischen Kraft verratenden Aenderungen nicht blos der Entfernung der Bodenmassen entsprechen, sondern zugleich eine Folge der Ausschaltung jener die besagten Massen durchfliessender Stromteile und der Modification der ganzen Stromverteilung sein. Im Laufe meiner zu Szent-Lőrincz angestellten Versuche, bei welchen das astatische Variometer 150 Centimeter hoch über dem Erdboden aufgestellt war, liess ich, anderthalb Meter von dem Fusspunkte des Instrumentes entfernt, einen zwei Meter langen, einen Meter breite nund ebenso tiefen Graben ziehen. Die hiedurch veranlasste Aenderung im Stande des Instruments entsprach der Wirkung eines in die Mitte des Grabens versetzten Magneten von etwa 100 C. G. S. Momenteinheiten. Heftige Schneefälle bei Eintritt des Winters machten meinen Untersuchungen ein Ende, so dass ich nicht ermessen konnte, welcher Teil an der besagten Aenderung auf Rechnung der etwa magnetisch beschaffenen sandigen Bodenmasse, und welcher der sie durchziehenden Erdströme zu schreiben sei.

Die beschriebenen Magnetovariometer sind zugleich als sehr empfindliche Galvanometer verwendbar, und erlauben bequem die Bestimmung des Moments konstanter Magnete. Ein Magnet vom Momente 10,000 C. G. S. übte noch in einer Entfernung von 15—20 Meter merkbare Wirkung auf das Translatometer aus.



Eine interessante Frage, deren Lösung ebenfalls von meinen Instrumenten zu erwarten ist, bilden die zeitlichen Variationen der magnetischen Kraftänderungen. Vorderhand wurde im physikalischen Institute durch Monate hindurch der Gang des Translatometers, d. h. die zeitliche Variation der translatorischen Kraft auf photographischem Wege registriert. Die auffällig hervortretende tägliche Periode dieser Variationen ist sicherlich zum grossen Teil eine Folge jener Ströme, welche durch die unterirdisch gelegten Kabel auch dem Erdboden in der Stadt überliefert werden. Jedenfalls wäre die Wiederholung ähnlicher Beobachtungen ausserhalb der Stadt, also bei Ausschluss dieser künstlichen Stromquellen sehr erwünscht.

### III. Bestimmung der Gravitationskonstante.

Beobachtungen über Gravitation sind seit dem Jahre 1888 im physikalischen Institute der hiesigen Universität fast alltäglich geworden. Ausser den eigentlichen Untersuchungen haben auch meine Hörer sowohl während des Vortrages, als im Laufe der praktischen Uebungen genügsam Gelegenheit, sich aus eigener Erfahrung mit der gegenseitigen Anziehung der Massen bekannt zu machen.

Der erste Apparat, mit dem es mir im Jahre 1888 in einem populären Vortrage gelang, die Erscheinung der Massenanziehung einem grösseren Hörerkreise sichtbar zu machen, war ähnlich dem Quadranten-Elektrometer gebaut. Unter dem in seinem Metallkasten gut geschützten Coulomb'schen Waagebalken befindet sich ein in Quadranten geteiltes cylindrisches Metallgefäss, dessen zwei gegenüberliegende Quadranten mit von unten zugeführtem Quecksilber abwechselnd gefüllt wurden. Das Instrument war schon bei einer Schwingungsdauer von 3—4 Minuten genügend empfindlich, und zeigte selbst im gleichen und erleuchteten Lehrsaale überraschende Stabilität. Die Berechnung der Anziehung der Quecksilberquadranten ist wohl etwas langwierig. Eine lange und abwechselungsreiche Reihe von Messversuchen wurde seitdem bald mit kugelförmigen, bald mit parallelepipedischen Bleimassen angestellt, deren Gewicht in manchen Versuchen 50—100 Kilogramm, in anderen 1 Kilogramm oder gar noch weniger betrug.

Für diese, ihrer Methode nach dem Cavendish'schen Verfahren übrigens ähnlichen Messungen ist besonders hervorzuheben, dass die anziehenden Massen meistens mit dem Waagebalken nicht in derselben Höhe, sondern auf einer unter demselben in horizontaler Ebene drehbaren Tischplatte angebracht wurden. Diese Anordnung ist schon deshalb vorteilhaft, weil hiebei der Waagebalken in einen für seinen vollkommenen Schutz so sehr geeigneten flachen cylindrischen Metallkasten eingeschlossen werden kann, wie dies in der I. Abteilung des Näheren erörtert wurde. Ein weiterer Vorteil ergibt sich daraus, dass die Anordnung so gewählt werden kann, dass die Aenderung der abzumessenden Kraft während der Ausweichung des Waagebalkens vollkommen vernachlässigt werden kann. Die anziehenden Massen können nämlich auf der unter dem Waagebalken befindlichen Platte in eine solche Lage gebracht werden, dass ihre Wirkung auf den Balken ein Maximum wird. Das geschieht z. B. bei der Anziehung von Kugeln in dem Falle, als die auf den Balken senkrechte Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der anziehenden und der dem Balken aufgesetzten Kugeln mit der Horizontalen einen Winkel von nahe  $55^\circ$  bildet. In dieser, dem Maximum der Wirkung entsprechenden Lage genügt es zur Bestimmung der relativen Stellung der aufeinander wirkenden Massen, bloß auf die Abmessung des vertikalen Abstandes Sorge zu verwenden, was ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist.

Dass bei einer solchen Anordnung die abzumessende Kraft kleiner wird, als sie im Falle mit dem Waagebalken gleich hoch angebrachter Massen wäre, kommt bei der Empfindlichkeit meiner Apparate nicht in Betracht, da bei einer Schwingungsdauer von 10 oder mehr Minuten auch so noch Ablenkungen von über 2 bis 3 Graden erzielt wurden. Um überzeugende Belege des regelmässigen Verlaufes der ganzen Erscheinung zu gewinnen wurden photographische Aufnahmen derselben verfertigt, welche dadurch entstanden, dass von dem Spiegel des Waagebalkens reflektirtes Licht auf eine mit lichtempfindlichem Papier bezogene und durch Uhrwerk gleichmässig gedrehte Walze fiel.

Bei den Messungen selbst bediente ich mich zumeist der Poggendorff'schen Skalenablesung, die photographische Methode



wurde eher zur beweiskräftigen Demonstration meiner Behauptungen oder aber in solchen Fällen herangezogen, da übergrosse Empfindlichkeit der Instrumente ein Annähern an dieselben verbot. Von solchen Fällen soll noch später die Rede sein.

Ich komme nun zur Darlegung einer wesentlich neuen Methode, die sich mir während meiner auf die Aenderungen der Schwerkraft bezüglichen Untersuchungen darbot. Das Wesen dieser zur Bestimmung der Gravitationskonstante dienlichen Methode besteht nämlich darin, dass nicht die Kraft selbst, sondern nur deren Aenderung gemessen wird, also nicht die Ablenkung des Waagebalkens, sondern einzig dessen Schwingungsdauer und deren Veränderung benützt wird.

Zu dem Ende wurde die in ihrem doppelwandigen Metallkasten gut geschützte Coulomb'sche Waage zwischen zwei auf quadratischer Grundfläche sich erhebenden vertikalen Bleisäulen aufgestellt; der leere Raum zwischen den beiden Säulen besass ebenfalls quadratischen Grundriss. Die Art der Aufstellung ist übrigens aus Fig. 11 ersichtlich. Die Basis der Säulen beträgt nahezu  $30 \times 30$  Centimeter, die Höhe 60 Centimeter und die Entfernung der gegen einander gekehrten Säulenflächen ebenfalls 30 Centimeter, so dass die ganze Bleimasse als eine 90 Centimeter lange, 30 Centimeter dicke und 60 Centimeter hohe Wand betrachtet werden kann, aus deren Mitte eine quadratische Säule von 30 Centimeter Seitenlänge herausgehoben wurde.

Die Schwingungen des Waagebalkens wurden um zwei aufeinander senkrechten Gleichgewichtslagen beobachtet: um eine longitudinale, in die Längsrichtung der Wand fallende, und um eine darauf senkrechte transversale Lage. In der longitudinalen Stellung betrug die Schwingungsdauer 641 Sekunden, in der transversalen 860 Sekunden.

Die Wahl dieser eigentümlichen Aufstellung der anziehenden Massen entsprang aus folgender, auf einen idealen Fall bezugnehmenden Ueberlegung. Denken wir uns eine unendlich lange, unendlich hohe, aber endlich dicke, parallelepipedische, vertikale, homogene Wand, und legen durch deren Mitte als Anfangspunkt ein orthogonales Koordinatensystem, deren Z-Axe nach unten ge-

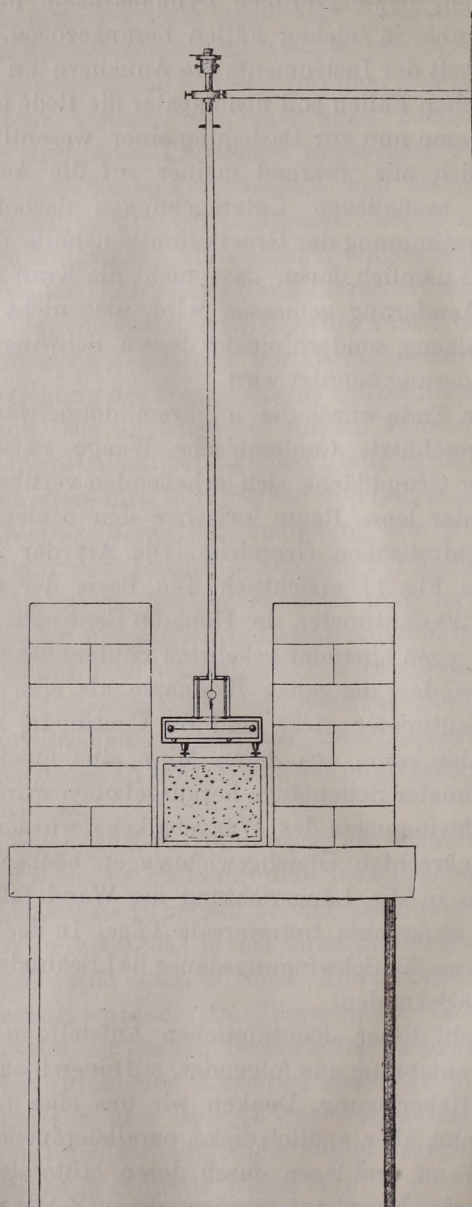


Fig. 11.



kehrt ist, dessen  $Y$ -Axe in der Längsrichtung der Wand sich erstreckt, während die  $X$ -Axe hierauf senkrecht steht.

Für einen im Innern dieser Wand vom Anfangspunkte in endlicher Entfernung liegenden  $(x, y, z)$  Punkt ist die Anziehung senkrecht zu deren vertikalen Längswand, und mithin wird

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

weiterhin

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0,$$

und somit bleibt:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -4\pi f\sigma,$$

wo  $\sigma$  die Dichte der homogenen Wand,  $f$  die Konstante der Gravitation bedeutet, d. h. jene Anziehungskraft, die im Sinne des NEWTON'schen Gesetzes die Masseneinheit auf die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung ausübt.

Es kann daher die Mitte des Wandinnern als gleichmässig veränderliches Kraftfeld betrachtet werden, und wenn der Waagebalken im Innern der Wand in der  $XY$ -Ebene frei drehbar gedacht wird, können auf seine Schwingungen die Gleichungen der Abteilung I angewendet werden. Bezeichnet daher  $T_l$  die Schwingungszeit um die longitudinale, der Längsrichtung der Wand entsprechenden Gleichgewichtslage,  $T_t$  die Schwingungszeit um die darauf senkrechte transversale Lage, so kommt (vergl. p. 203):

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} \right) = 2(1-\varepsilon) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right);$$

oder mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{8\pi f\sigma}{\pi^2} (1-\varepsilon). \quad 1)$$

Diese Gleichung wird aber auch dann noch richtig bleiben, wenn man aus der unendlichen Wand eine vertikale Säule mit quadratischem Querschnitte derart heraushebt, dass deren Mittelpunkt in die Drehungsaxe des Waagebalkens falle, und dieser nun

in der Tat frei drehbar wird. Bezeichnet man nämlich das Drehungsmoment um die longitudinale, beziehentlich transversale Gleichgewichtslage im Falle der vollen Wand mit  $f_l\omega$  und  $f_t\omega$ , für die unterbrochene Wand mit  $f'_l\omega$  und  $f'_t\omega$ , so ist, wie leicht einzusehen:

$$f'_l\omega - f'_t\omega = f_l\omega - f_t\omega,$$

da die Waagegestange in beiden aufeinander senkrechten Lagen der herausgehobenen quadratischen Säule gegenüber in derselben relativen Lage steht, und sonach die Entfernung dieser Masse in beiden Fällen das Drehungsmoment der anziehenden Kräfte um ebendieselbe Grösse verändert; es besteht also mit entsprechenden Bezeichnungen die Gleichung:

$$\frac{\pi^2}{T_l^2} - \frac{\pi^2}{T_t^2} = \frac{\pi^2}{T_l'^2} - \frac{\pi^2}{T_t'^2} = \frac{f_l - f_t}{K};$$

welche unsere Behauptung und die zwei vorangehenden Gleichungen erhärtet.

Für die Säulen endlicher Dimensionen, welche auf die früher beschriebene Weise aufgestellt und bei den Versuchen tatsächlich verwendet wurden, sind ähnliche Ueberlegungen anwendbar; der einzige Unterschied besteht darin, dass in der erwähnten Gleichung an die Stelle von  $8\pi$  der Zahlenwert 13,427 tritt. Zunächst gilt diese Zahl strenge nur für die beiden am Ende des Waagebalkens befestigten Kugeln, beansprucht aber bei den gewählten Abmessungen der Waage für die der Drehungsaxe näher gelegenen Teile des Waagebalkens nur sehr kleine Verbesserungen. Es wird sonach:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13,427}{\pi^2} f \cdot \sigma (1 - \varepsilon')$$

wobei  $\varepsilon'$  eine kleiner als ein Procent ausfallende Korrectionsgrösse bedeutet, die von den Dimensionen des Waagebalkens und der nicht unendlichen Ausdehnung der anziehenden Wand abhängt.

Die Beobachtung der Schwingungszeiten kann mit überraschender Sicherheit und Genauigkeit angestellt werden. Die Herren Dr. RUDOLF KÖVESLIGETHY und Dr. KARL TANGL bestimmten aus



59 vom 26. Jänner bis 26. März 1891 sich erstreckenden Beobachtungsreihen den Wert der Grösse  $\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2}$ . Jede Beobachtungsreihe umfasste 8 Schwingungen um die longitudinale und ebensoviele um die transversale Gleichgewichtslage.

Die äussersten Werte der auf unendlich kleine Amplituden reducierten Schwingungszeiten dieser langen Beobachtungsreihe, während welcher die Temperatur des verfinsterten Kellerraumes von  $2^\circ \text{ C}$  auf  $5^\circ \text{ C}$  stieg, sind 640,97 und 641,28 Sekunden für die longitudinale, und 859,29 und 860,32 Sekunden für die transversale Stellung. Bei der Berechnung der Beobachtungen fasste ich die Werte der Schwingungsdauer für beide Lagen von je einem Tage zusammen, und erhielt als Mittelwert der 59 Beobachtungen:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = 0,000\,001\,080\,31.$$

Unter allen 59 Werten ist nicht einer, der vom Mittel auch nur um ein Tausendstel des Betrages abweiche, und der wahrscheinliche Fehler des Mittels beträgt nur vier Einheiten der letzten Dezimale, also etwa  $\frac{1}{25000}$ -tel des Ganzen. Bestimmt man darauf die Schwingungszeiten für beide Richtungen auch bei weggenommenen Bleisäulen, so erhält man  $T_l = 742,82$  Sekunden für die longitudinale und  $T_t = 759,07$  Sekunden für die transversale Lage, welcher Unterschied offenbar eine Folge der Anziehung der den Beobachtungsraum umgebenden Wände und Bodenmassen ist. Obwohl ich auch die oben mit  $\epsilon'$  bezeichnete Korrektur in Rechnung zog, konnte ich doch diese Aufgabe bis heute nicht vollständig und endgültig lösen, da ich noch nicht Gelegenheit fand einen Faktor, nämlich den Einfluss der während der Schwingung vom Waagebalken in Bewegung gesetzter Luft mit der hier geforderten Genauigkeit aufzudecken. Versuche, die mit eben derselben Coulomb'schen Waage, jedoch nicht zwischen den Bleipfeilern, an einem andern Orte, unter einem besonders hierzu angefertigten, das ganze Instrument bedeckenden Recipienten in verdünnter Luft angestellt wurden, zeigten, dass die Bewegung der Luft in diesem flachen Kasten selbst bei sehr langsamen Schwingungen einen bedeutend grösseren Einfluss auf die Schwingungsdauer

ausübt, als es nach den auf das Pendel bezüglichen Untersuchungen BESSEL's zu erwarten war. Ein Stab, der z. B. in Luft von normalem Drucke eine Schwingungsdauer von 648,92 Sekunden besass, verkleinerte dieselbe in Luft von 20 mm Druck auf 648,00 Sekunden. Diese und ähnliche Versuche gewährleiten aber noch nicht die genügend genaue Bestimmung der nötigen Korrektur, da nach meinen Erfahrungen die Bewegung des Waagebalkens in der Luft sogar von der Höhe desselben im Waagekasten abhängt, und zu dem wäre jedenfalls zu überlegen, ob die Aenderung der anziehenden Kräfte im Innern des Kastens diese Wirkung der Luft nicht in irgend einer Weise beeinflusst.

Es wäre daher für die Lösung der Aufgabe sicherlich zweckdienlicher, diese heiklen Fragen ganz zu umgehen, und die Messungen schon zwischen den Pfeilern in luftleerem Raume anzustellen, was ich jedoch, bei den Dimensionen der mir zu Gebote stehenden Instrumente bisher nicht zu tun in der Lage war.

Teils aus dieser Ursache, teils weil die Homogenität der benützten Bleimassen doch immerhin fraglich bleibt, gehe ich auf Grund meiner bisherigen Beobachtungen nicht weiter mit derjenigen Genauigkeit auf die Bestimmung der Konstante der Gravitation ein, welche unter Anwendung meiner Methoden sicherlich zu erwarten ist. Daher nur die Bemerkung, dass meine bisherigen Beobachtungen den Wert dieser Konstante von

$$f=0,000\ 000\ 066\ 5$$

um kaum ein  $\frac{1}{500}$ -tel des Betrages abweichend festsetzen.

In dieser Abhandlung lege ich jedoch nicht auf diesen Zahlenwert, sondern vielmehr auf die Methode das Hauptgewicht, da mich dünkt, dass die schon jetzt erlangte Genauigkeit in der Beobachtung der Schwingungszeiten Gewähr leiste, dass diese überaus wichtige Konstante mit eben dieser Genauigkeit bestimmt werden könne, mit welcher die Schwerebeschleunigung aus Pendelschwingungen ableitbar ist. Dazu gehört aber ausser der richtigen Beobachtung der Schwingungszeiten noch luftleerer Raum und statt des unzuverlässigen Bleies wirklich homogenes Quecksilber.



## IV. Zwei Hilfsmittel zum Studium der Gravitation.

### 1. *Gravitationscompensator.*

Bei allen Instrumenten, mit denen die bisher aufgezählten Untersuchungen angestellt wurden, setzte der Empfindlichkeit die Grösse des Torsionskoeffizienten des den Waagebalken tragenden Platindrates oder Quarzfadens eine Grenze. Indem ich noch grössere Empfindlichkeit anstrebte, wendete ich mich dem Hilfsmittel der Kompensation zu und benützte zu diesem Zwecke gerade die Massenanziehung selbst, die ihrer Beständigkeit zufolge zweifels- ohne hiezu dienlicher war, als irgend eine andere Kraft.

Die durch ihre Anziehungskraft kompensirenden Massen wurden an beiden Seiten nahe dem Ende des Balkens so angebracht, dass in der Gleichgewichtslage desselben die Kraft selbst Null oder wenigstens sehr klein, ihre Aenderung dagegen bei einer Ablenkung des Stabes bedeutend werde. Das Drehungsmoment sämtlicher auf den Balken wirkenden Kräfte wird dann bei der kleinen Elongation  $\omega$  desselben  $(\tau \pm \varphi)\omega$  sein, d. h. je nach der Anordnung der kompensirenden Massen grösser oder kleiner, als es der Drahtelasticität allein entspräche. Auf diese Weise gelang es mir in der Tat ein Instrument zu bauen, dessen Empfindlichkeit ganz nach Belieben bis zur Unendlichkeit, d. h. bis zum Eintreten des labilen Gleichgewichtes gesteigert werden kann.

Dieser Apparat ist durch die Figuren 12 und 13 dargestellt. Der an seinen Enden mit Kugeln belastete leichte Waagebalken wurde behufs zweckdienlicher Anordnung der kompensirenden Massen in eine 4 Centimeter äusseren Durchmesser haltende doppelwandige Metallröhre verschlossen, so dass der ganze Waagekasten ein  $\perp$ -förmiges Rohr bildet: In dem 1·5 Meter langen vertikalen Teile befindet sich der Aufhängedraht oder Quarzfaden; in dem 55 Centimeter langen horizontalen Teile schwingt der Waagebalken. Derselbe ist 50 Centimeter lang, die seinen Enden angesetzten Kugeln wiegen je 30 Gramm, das Drehungsmoment des ganzen Systems betrug ohne die kompensirenden Massen 0,1478  $\omega$  C. G. S. Dieses enthält (siehe I. Abteilung) natürlich ausser dem der Drillung des Drates entgegenwirkenden Momente auch noch

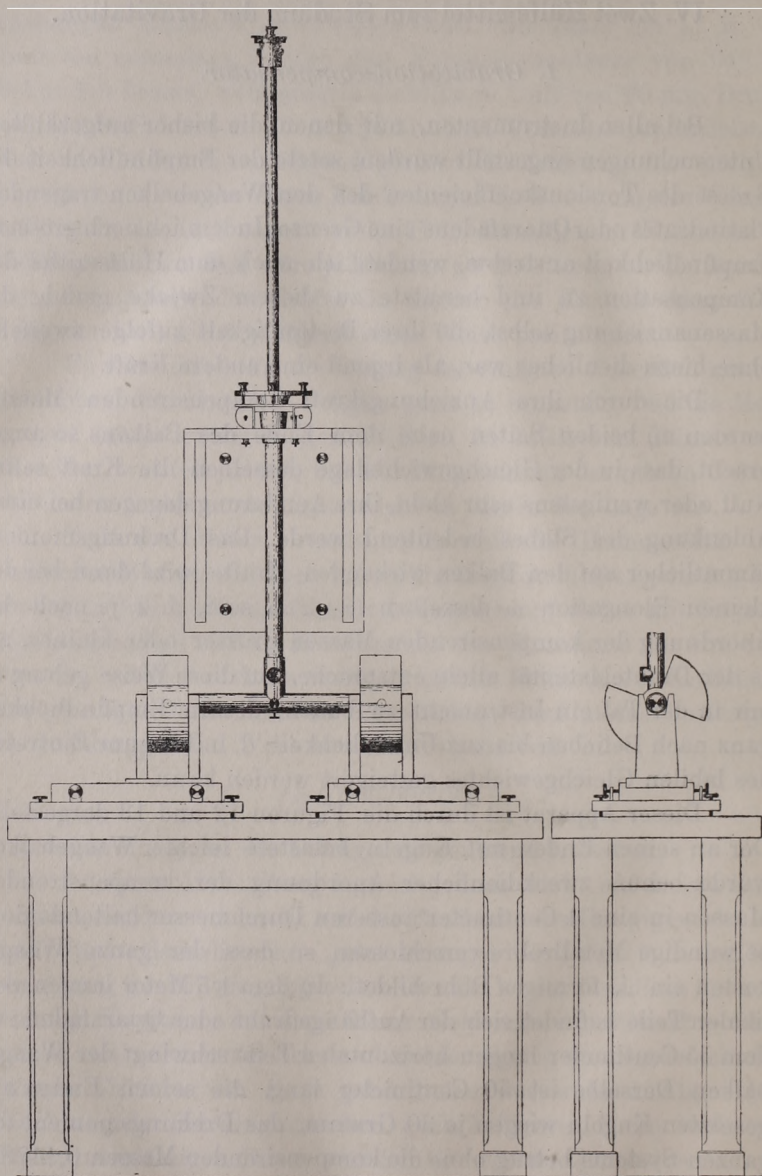


Fig. 12. und 13.



jenes Drehungsmoment, welches aus der Schwereänderung am Beobachtungsorte entspringt.

Die kompensirenden Bleigewichte sind an eine, das Schutzrohr des Waagebalkens umgebende Metallhülse von 5 Centimeter lichtem Durchmesser gelötet; diese Hülse ruht in einem horizontalen Axenlager, so dass die Gewichte um das horizontale Rohr der Waage gedreht werden können.

Die Kompensationsmassen erhielten die Form von Cylinder-Quadranten, deren mittlerer Teil durch die Metallhülse abgeschnitten ist, an welcher sie angelötet sind, Fig. 14. a. f. S. Zwei auf der erwähnten Hülse sich gegenüberstehende Quadranten bilden einen Kompensator. Die Dimensionen derselben sind: innerer Radius des Quadranten 2,5, äusserer Radius 12 Centimeter, Dicke, d. h. der Abstand der beiden ebenen Begrenzungsflächen 9,5 Centimeter.

An beiden Enden der Waage kann je ein solcher Kompensator angebracht werden, so dass sich die Kugeln des Waagebalkens um die Mitte der Cylinderquadranten bewegen.

Sowohl die Kugeln, als der Stab stehen unter Einfluss der Anziehung der beiderseits sich gegenüberstehenden Quadranten. In der Mittellage des Stabes halten sich diese von entgegengesetzten Seiten kommenden und im Falle gleicher Quadranten ebenfalls gleiche Kräfte zwar das Gleichgewicht, aber die Kräfteänderungen um die Gleichgewichtslage bringen, als mit gleichen Vorzeichen behaftet, auch gleichgerichtete Wirkungen hervor.

Bedenkt man, dass der Mittelpunkt der den Waagebalken einer Coulomb'schen Wage aufgesetzten Kugel bei unendlich kleinen Ausweichungen das horizontale Bogenelement

$$\delta s = l \delta \omega$$

beschreibt, so ist die nahe der Gleichgewichtslage in der Richtung der Bewegung ablenkende Kraft

$$f m \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \delta s = f m \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} l \delta \omega;$$

und deren Drehungsmoment:

$$f m \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} l^2 \delta \omega.$$

Es ist leicht einzusehen, dass sich der Wert  $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$  mit der Neigung der Quadranten gegen die Horizontale verändert, und bezeichnet  $\varphi$  den Neigungswinkel der Mittellinie  $KK$  der Quadranten (Fig. 14), so lässt sich mittels Rechnung die Beziehung nachweisen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = a + b \cos 2\varphi.$$

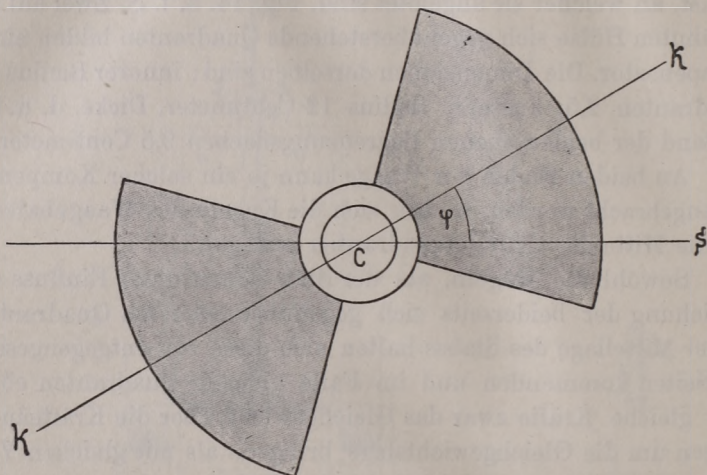


Fig. 14.

Hiebei sind  $a$  und  $b$  Konstanten, welche lediglich von den Abmessungen und der Dicke der Quadranten und dem Wert der Gravitationskonstanten abhängen; für mein Instrument ergaben sie sich zu:

$$a = 0,000\,001\,190,$$

$$b = 0,000\,003\,722.$$

Setzt man dann  $m = 30$  g,  $l = 25$  c, so wird das die Ausweichung der Stange vergrößernde Drehungsmoment der gesammten Kompensationsmassen:

$$F\omega = (0,044\,62 + 0,139\,57 \cos 2\varphi) \omega;$$



ohne die Kompensationsmassen war aber, wie schon früher p. 235 unten erwähnt:

$$\tau\omega = 0,1478\omega;$$

so dass das Drehungsmoment, welches den Waagebalken des mit Kompensatoren versehenen Instrumentes in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt

$$F\omega = (\tau - F)\omega = (0,10315 - 0,13957 \cos 2\varphi)\omega$$

wird. Um das Drehungsmoment und damit die Empfindlichkeit zu verändern, bedarf es nur einer Neigungsänderung der Quadranten. So ist z. B.

$$\text{bei } \varphi = 90^\circ \quad F = 0,24272;$$

$$\text{„ } \varphi = 45^\circ \quad F = 0,10315;$$

$$\text{„ } \varphi = 25^\circ \quad F = 0,01344;$$

und bei  $\varphi = 21^\circ 10' 45''$  gar  $F = 0$ , d. h. der Waagebalken wird labil. Setzt man das Trägheitsmoment des Balkens in runder Zahl zu 38000, und zieht von dem Luftwiderstande ab, so ergibt sich nach der Formel die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{F}}$$

$$\text{für } \varphi = 90^\circ \quad T = 1243^s;$$

$$\text{„ } \varphi = 45^\circ \quad T = 1907^s;$$

$$\text{„ } \varphi = 35^\circ \quad T = 5283^s;$$

wegen des Widerstandes der Luft kommen aber diese über eine Stunde langen Schwingungen in der Tat nicht mehr zu Stande, sie gehen vielmehr in eine aperiodische Bewegung über.

Bei solch' empfindlicher Einstellung nimmt das Instrument nur an möglichst geschütztem Orte, z. B. in einem gut temperirten und verdunkelten Keller stabile Gleichgewichtslage ein, und die Beobachtung selbst kann nur mehr auf photographischem Wege mit der erforderlichen Genauigkeit bewerkstelligt werden. Unter diesen Vorbedingungen entspricht aber die Waage allen Erwartungen. So gelang es durch die im Keller aufgestellte Waage die Anziehung einer im benachbarten Hofe in fünf Meter Entfer-

nung angebrachten Masse von 300 Kilogramm nachzuweisen. Wurde die Masse in derselben Entfernung auf die Seite entgegengesetzter Wirkung übertragen, so erlitt der Wagebalken, wie es die vorhergehende Rechnung erheischte, eine Ablenkung von über 4 Bogenminuten. (Siehe Figur 15, *f*.)

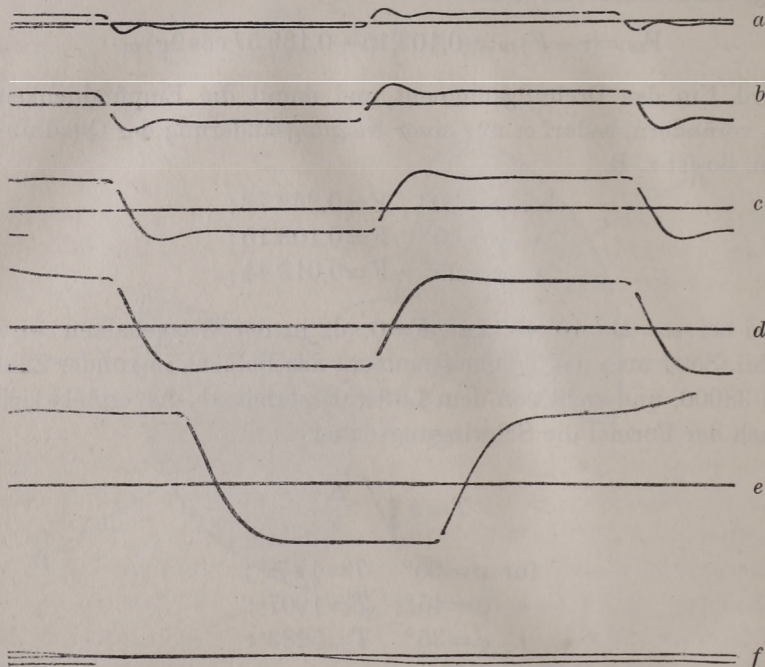


Fig. 15.

Die durch die Neigung der Quadranten gesteigerte Empfindlichkeit des Instrumentes wird durch die Figur 15 zum Ausdruck gebracht. Die Kurven *a*, *b*, *c*, *d*, *e* beschrieb der Balken stets unter Wirkung der Anziehungskraft einer Masse von 5 Kilogramm in einem Abstände von  $\frac{1}{2}$  Meter, die in wechselnder Aufeinanderfolge von der einen Seite auf die Seite der entgegengesetzten Wirkung transponirt wurde, doch waren dabei die Neigungswinkel  $\varphi$  der Quadranten verschieden, und zwar  $50^\circ$  bei *a*,  $45^\circ$  bei *b*,  $35^\circ$  bei *c*,  $30^\circ$  bei *d* und  $27,5^\circ$  bei *e*. Zugleich ersieht man, wie die bei



$a$  noch schwingende Bewegung sich bei  $d$  und  $e$  in eine aperiodische Bewegung verwandelt.

Zur Beurteilung der erreichbaren Empfindlichkeit meines Instrumentes möchte ich noch Eines erwähnen. Sollte sich einst Gelegenheit bieten, mein Instrument neben einem Flusse, See oder dem Meere so aufzustellen, dass es von den vertikalen Ufern um 1 Meter abstehe, während der Balken mit der Uferlinie einen Winkel von  $45^\circ$  einschliesst, so würde die Zunahme der Wasserröhe um einen Centimeter bei einer Neigung der Kompensatoren von  $45^\circ$  einen Ausschlag von einer Bogenminute, bei einer Neigung von 25 Graden schon eine Ablenkung von 7 Bogenminuten hervorbringen. Daher könnte das Instrument ganz wohl zur photographischen Registrirung der Gezeiten verwendet werden, und dies mit umso grösserem Vorteile, da es auch bei bewegtem Wasser stets den mittleren Stand angeben würde.

## 2. Gravitations-Multiplikator.

Es gelang mir auch, die unter Einfluss der Massenanziehung entstehenden kleinen Schwingungen durch Multiplikation in solche von grosser Amplitude zu verwandeln. Diese Multiplikation wurde in der folgenden Weise bewerkstelligt: unter dem Waagebalken befinden sich auf drehbarer Tischplatte die anziehenden Massen, die z. B. in ihrer Anfangsstellung den Balken in der Richtung des Ganges des Uhrzeigers ablenken. Im Moment der grössten Elongation werden die Massen durch Drehung des Tisches in eine Stellung gebracht in der die Anziehung eine entgegengesetzte Ablenkung verursacht; ist auch in dieser Richtung die grosse Elongation erreicht, so werden die Gewichte wieder in die erste Stellung umgelegt u. s. f. Bei dieser Art der Multiplikation, wo die Schwingungen des Balkens abwechselnd um zwei Gleichgewichtslagen vor sich gehen, wird der Grenzwert der durch mehrfache Wiederholungen vergrösserten Amplitude

$$A = a \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta};$$

wo  $a$  die Entfernung der beiden Gleichgewichtslagen von einander, und  $\vartheta$  das Dämpfungsverhältniss bedeutet, das bei Schwingungen

um eine feste Gleichgewichtslage bekanntlich durch den Quotienten zweier aufeinander folgenden Elongationen bestimmt wird.

Die photographischen Aufnahmen der so multiplicirten Schwingungen legen einen sprechenden Beweis dafür ab, in welchem Maasse es mir gelang, bei meinen Instrumenten alle jene störenden Faktoren fern zu halten, welche sonst die Zuverlässigkeit der Coulomb'schen Wage so oft beeinträchtigen. Auf diese Weise wurden längere Schwingungen von 10 Minuten sowohl, als auch kürzere von nur eine Minute multiplicirt. Die End-Elongation konnte im ersten Falle auf das zwanzigfache, im zweiten Falle gar auf das 150-fache der einfachen Ablenkung mit immer gleicher Sicherheit und Konstanz vergrössert werden.

Diese Methode der Multiplikation wird zweifelsohne auch beim Studium der Gasreibung gute Dienste leisten können.

Mir schwebte vorderhand ein anderes Ziel vor, indem ich die Multiplikation als sehr empfindliche Methode zur Bestimmung der Schwingungsdauer und deren Aenderung benützte. Ist nämlich  $T$  das Zeitintervall der periodischen Umlagerung der Massen, also die Periode der Aenderung der Kraft nicht identisch mit der Schwingungsdauer  $T$  des Waagebalkens, so kommen Schwingungen zu Stande, deren Endelongation  $A$  nicht bloß vom Abstände  $A$  der Gleichgewichtslagen, und der Dämpfung  $\delta$ , sondern auch noch vom Werte der beiden Perioden  $T$  und  $T$  abhängen. Der Balken wird in diesem Falle seinen Hin- und Hergang nicht mehr während einer Periode seiner eigenen Schwingung, sondern in der ihm durch die Kraftänderung auferzwungenen Zeit vollenden. Ich nenne daher diese Schwingungen, welche aus den Teilen zweier einfachen, um die jeweilige Gleichgewichtslage vor sich gehender Schwingungen zusammengesetzt sind, erzwungene Schwingungen.

Wird ein Waagebalken von der konstantbleibenden Schwingungsdauer  $T$  durch Massenumlagerung verschiedener Periode in erzwungene Schwingung versetzt, so ist klar, dass die Werte der Endelongation Daten liefern werden, aus welchen die eigene Schwingungsdauer  $T$  bestimmt werden kann. Und ebenso klar ist es, dass bei konstant bleibender Periode der Massenumlagerung Veränderungen in der eigenen Schwingungsdauer des Waagebal-



kens sich in der schliesslichen Grösse der End-Elongationen ver-  
raten werde. Wie empfindlich diese End-Elongation für Aenderun-  
gen der Perioden  $T$  oder  $T$  ist, möge aus folgendem Beispiele er-  
sehen werden :

mit  $T = 611''$  und  $T = 611''$  wird  $A = 252'$  Bogenminuten ;  
 „  $T = 611''$  „  $T = 600''$  „  $A = 225'$  „ ;  
 „  $T = 611''$  „  $T = 590''$  „  $A = 180'$  „ ;

so dass eine Verkleinerung von 10 Sekunden in der Zeit  $T$  die  
Grenzelongation um 45 Bogenminuten verkleinert, was durch-  
schnittlich 4,5' auf eine Sekunde ergibt.

Aus der Abmessung der Grenzelongationen dieser erzwun-  
genen Schwingungen können daher in der Tat Schwingungszeiten  
bestimmt werden, und diese Methode wird besonders dort mit gros-  
sem Vorteile benützt werden können, wo bei grosser Dämpfung  
eine längere Reihe von Schwingungen nicht beobachtet werden  
könnte.

Zur Erleichterung der practischen Ausführung solcher Multi-  
plicationen, insbesondere aber, um der langandauernden, geist-  
tödtenden Arbeit der Massenumlegung enthoben zu sein, construirte  
ich den *Electromagnetischen Multiplier*, einen Mechanismus,  
welcher diese Massenumlegung mit der Genauigkeit einer Uhr be-  
werkstelligt. Auch dieses Instrument wurde vom Director der  
staatlich subventionirten mechanischen Lehrwerkstätte, Herrn  
FERDINARD SUSS mit gewohnter Geschicklichkeit ausgeführt.